

Inž. ZDENĚK P. BAŽANT
Dopravoprojekt Praha

TEORIE DOTVAROVÁNÍ A SMRŠŤOVÁNÍ BETONU V NEHOMOGENNÍCH KONSTRUKCÍCH A PRŮŘEZECH

Charakteristickou vlastností většiny moderních betonových a ocelobetonových konstrukcí je vliv dotvarování a smršťování na jejich napjatost. Příčinou toho je při dotvarování buď změna statického působení konstrukce během výstavby, nebo nehomogenita konstrukce, již se vyznačují jednak konstrukce z betonu výrazně různého stáří, jako jsou letmo betonované mosty, mosty z prefabrikátů různého stáří nebo z prefabrikátů spolupůsobících se staveništním betonem, konstrukce betonované na samonosné výztuži a jiné konstrukce betonované ve velkých časových odstupech, jednak též spřažené nosníky ocelobetonové, zavěšené a visuté betonové mosty trémové, konstrukce z předpjatého betonu, válcové nádrže vetknuté do staršího tuhého základu ap. (obr. 6).

Některými dílčími případy se zabývali již četní badatelé, jako např. řešením složeného nehomogenního průřezu pro zjednodušené zatížení buď jen neměnným ohybovým momentem, nebo centrickým tlakem [4a, 5, 9, 10, 12, 16, 20, 24, 25, 27] a změnou statického působení a posunem podpor homogenní konstrukce [1, 12, 18, 19, 23, 33]. Levi a Eimer [13] řešili soustavou integrálních rovnic nehomogenní konstrukci z předpjatého betonu. Dále Finsterwalder řešil dotvarování letmo betonovaného mostu, zjednodušeně jednou staticky neurčitěho, za přibližného předpokladu, že beton každé konzoly je navzájem stejně starý, bez ohledu na vliv roční doby [14]. Dosavadní řešení nejsou uváděna s obecnější platností a ve vzájemné souvislosti. Konstrukce s homogenními průřezí řešil obecně autor již v lit. [2].

V této práci předkládáme zcela obecné řešení problému. Odvodíme též jeho variační formulaci, kterou vyslovíme v principu přetvárného odporu. Teorii dotvarování a smršťování konstrukcí zde podáváme jako jednoduší celek, vycházející z jediné obecné základní formulace, z níž jako speciální případy jednoduše plynou jak všechna dřívější řešení dílčích úloh, tak i nová řešení dalších úloh.

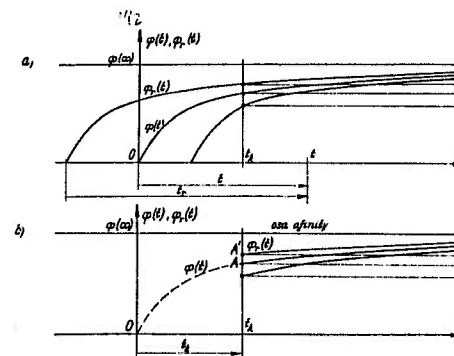
1. Předpoklady o průběhu dotvarování a smršťování

Základním předpokladem celého řešení je Dischingerův zjednodušující předpoklad o průběhu dotvarování betonu, který na rozdíl od jiných složitějších závislostí [1, 13, 15] umožňuje dovést matematické řešení k praktickým výsledkům. Podle tohoto předpokladu je deformace od dotvarování rovna deformaci pružné, násobené součinitelem dotvarování, který nezávisí na napětí [12, 23, 33]. Závisí pouze na čase podle jedné a téže funkce, násobené určitou konstantou, závislou na průměrných atmosférických podmínkách, nikoliv však na jejich proměně (ČSN), nebo na krychelné pevnosti v určité době po vybetonování, jež je též funkcí složení betonu a průměrných atmosférických podmínek do provedení zkoušky pevnosti (DIN). Modul pružnosti se uvažuje konstantní. Deformace v určitém časovém úseku je dána rozdílem počáteční a konečné

hodnoty součinitele dotvarování, takže na rozdíl od přírůstku deformace závisí i na stáří betonu při zavedení zatížení.

Skutečný průběh součinitele dotvarování se od ideální křivky odlišuje hlavně značnou závislostí na proměně atmosférických podmínek, zvl. teploty a vlhkosti, což potvrzují četná pozorování (viz např. most přes Neckar [23], str. 97, obr. 2.67). Při stejně starém betonu není však třeba tento vliv uvažovat, neboť se v průběhu času (několika let) vyrovnává. Není to však možné u konstrukce z betonu různého stáří, kde konečné účinky závisí též na tom, jaký je rozdíl plastických deformací jednotlivých částí různého stáří v době, než začaly spolupůsobit. Tento rozdíl je určen změnou součinitele dotvarování v době mezi vybetonováním jednotlivých částí. Jelikož je tato doba krátká, nelze v ní většinou předpokládat vyrovnání účinků proměny atmosférických podmínek. Vezmeme je proto v úvahu, a to tak, že při určení součinitele dotvarování dosadíme místo skutečného času t tzv. redukovaný čas t_r , tj. že v roční době s velkými dotvarováním (letní měsíce) zavedeme do počtu určitý násobek časového rozdílu ap. Redukovaný čas t doporučujeme zavést v měsících červen až srpen ca $4/3$, resp. až $3/3$ skutečné doby, v měsících prosinec až únor $2/3$, resp. až $1/3$ skutečné doby a ve zbyvajících měsících nezměněnou hodnotou. Přitom první i druhé hodnoty si vzájemně odpovídají tak, že součet redukovaného času za jeden rok se rovná právě jednomu roku (graficky viz na obr. 5).

Zvolme počátek měření času pro celou konstrukci a označme t čas (redukovaný), měřený od tohoto okamžiku. Času t dále odpovídá základní křivka $q(t)$ součinitele dotvarování, jejíž průběh je předepsán normou. Počátek času t je vhodné volit tak, aby



Obr. 1. a) Ideální křivky. - b) Afinní ideální křivky součinitelů dotvarování.

Рис. 1. а) Идеальные кривые. — б) Аффинные идеальные кривые коэффициентов ползучести $q(t)$.

Fig. 1. a) Ideal curves. — b) Affine ideal curves of creep factors $q(t)$.

čas t vyjadřoval zhruba průměrné stáří betonu konstrukce. V určitém okamžiku daném časem t má beton v místě r stáří t_r . Pro výpočet zavedeme zjednodušující předpoklad, že křivka $q_r(t)$ součinitele dotvarování v místě r je afinním obrazem základní křivky $q(t)$, určeném podmínkami (obr. 1), že v čase $t = t_r$ a v čase $t \rightarrow \infty$ zůstávají hodnoty $q_r(t)$ nezkresleny a že osa afinity je rovnoběžná s osou času, která ve spec. případě $q_r(\infty) = q(\infty)$ je společnou asymptotou obou křivek (ČSN). Při označení $\bar{q}(t) = q(t) - q(t_k)$, $\bar{q}_r(t) = q_r(t) - q_r(t_k)$, tedy platí

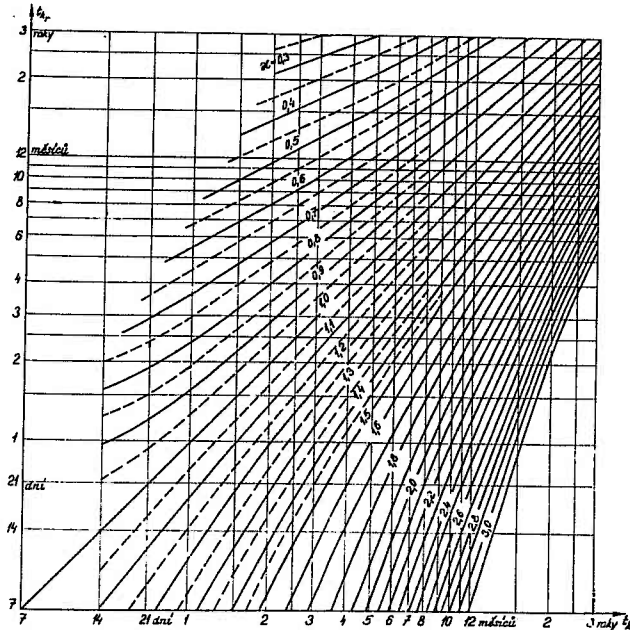
$$\bar{q}_r(t) = \alpha \bar{q}(t), \quad (1)$$

kde číslo

$$\alpha = \frac{\bar{q}_r(\infty)}{\bar{q}(\infty)} = \frac{q_r(\infty) - q_r(t_k)}{q(\infty) - q(t_k)} \quad (2)$$

nazveme koeficientem afinity dotvarování v místě r . Obvykle platí $\varphi_r(\infty) = \varphi(\infty)$, odkud též plyne $\varphi_r(t_k) = \varphi(t_k)$. Pro tento případ byl sestrojen grafikon hodnot κ v závislosti na t_k a t_r , odpovídající průběhu $\varphi(t)$ podle ČSN 73 2001 (obr. 2).

Předpoklad afinity je přesně splněn tehdy a jedině tehdy, je-li $\varphi(t) \sim 1 - e^{-at}$, kdy platí $\kappa = e^{-a(t_r - t)}$ (Fr. Dischinger [11]), což v přibližném výpočtu užil již U. Finsterwalder [14]. Pro průběh $\varphi(t)$ podle naší nebo jiné normy není afinita zcela přesně splněna, avšak vzhledem k nemožnosti přesného určení $\varphi(t)$ jsou odchylky bezvýznamné.



Obr. 2. Hodnoty koeficientů afinity dotvarování κ v závislosti na časech t_k a t_r .

Рис. 2. Значения коэффициентов аффинности ползучести κ в зависимости от времени t_k и t_r .

Fig. 2. Values of affinity factors of creep κ depending on time t_k and t_r .

Předpoklad afinity je opodstatněn též tím, že atmosférické vlivy zkreslují všechny křivky $\varphi(t)$ ve stejném poměru. Redukci času proto vyhovuje jedině afinní vztah. Jednoduchý předpoklad afinity je jediným předpokladem, jež potřebujeme pro další matematické řešení. Jinak $\varphi(t)$ může být libovolná spojitá rostoucí funkce času.

Při ohybu železobetonových průřezů, kdy přibližně počítáme s plným průřezem betonovým, je třeba dosadit $\varphi(t)$ asi čtyřikrát menší než udává norma pro předpjaté konstrukce, neboť je tlačena jen malá část průřezu, beton v tahu nepůsobí a tažená výztuž se nedotvaruje.

Pro příčné deformace od dotvarování budeme uvažovat obecně jinou (menší) hodnotu Poissonova čísla.

Poměrné smrštění $\bar{\varepsilon}_{sm,r}(t)$ od času t_k do t je normami jednoduše zaváděno jako úměrné hodnotám $\bar{\varphi}(t)$, tj.

$$\bar{\varepsilon}_{sm,r}(t) = \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \bar{\varphi}_r(t) = \kappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \bar{\varphi}(t). \quad (3)$$

V konstrukcích, v nichž spolupůsobí ocel s betonem, je třeba zavést též reologické vlastnosti oceli [15, 30]. Relaxace oceli vzrůstá značně s poměrem napětí oceli k mezi průtažnosti a dosahuje až 0,15. V porovnání s betonem je však dotváření oceli mnohem menší (řádově) a podle normy proběhne z větší části brzo. Pro ocel v ocelobetonové konstrukci lze proto přibližně dosadit $\kappa \doteq 0$. Ocel lze tedy považovat za nekonečně starý beton.

2. Nehomogenní těleso

Uvažujme isotropní těleso z betonu různého stáří nebo z betonu a oceli. Můžeme si pod tím představit např. přehradní zeď, zdívo elektrárny betonované mezi prefabrikované panely [23a] aj. Každému místu tělesa danému souřadnicemi x, y, z přísluší koeficient afinity dotvarování $\kappa = \kappa(x, y, z)$. Dotvarování a smršťování betonu tělesa způsobí změnu napětí $\sigma_x(t), \sigma_y(t), \sigma_z(t), \tau_{xy}(t), \tau_{yz}(t), \tau_{zx}(t)$, poměrných deformací $\varepsilon_x(t), \varepsilon_y(t), \varepsilon_z(t), \gamma_{xy}(t), \gamma_{yz}(t), \gamma_{zx}(t)$ a posunutí $u(t), v(t), w(t)$ s časem. Nechť pro $t > t_k$ jsou okrajové podmínky tělesa neměnné a vnější zatížení stálé.

Platnost rovnic statických, geometrických a kompatibility [31a, 34] evidentně zůstává zachována. Derivováním těchto rovnic podle $\bar{\varphi}(t)$ zjistíme, že jsou-li objemové síly nulové, dostaneme platné rovnice také záměnou napětí a přetvoření za jejich derivace podle $\bar{\varphi}(t)$.

Sestavme nyní přetvárné rovnice objemového elementu, nahrazující Hookeův zákon. Změna deformace za dobu Δt je rovna součtu změny deformace od dotvarování odpovídající $\Delta \bar{\varphi}(t)$, od smršťování odpovídající $\Delta \bar{\varepsilon}_{sm}(t)$, a od změn napětí $\Delta \sigma_x(t), \dots, \Delta \tau_{xy}(t), \dots$ za dobu Δt .

$$E \Delta \varepsilon_x(t) = [\sigma_x(t) - \mu' \sigma_y(t) - \mu' \sigma_z(t)] \Delta \bar{\varphi}_r(t) + \Delta \sigma_x(t) - \mu \Delta \sigma_y(t) - \mu \Delta \sigma_z(t) + E \varepsilon_{sm,r}(t), \quad (4)$$

$$E \Delta \gamma_{xy}(t) = 2(1 + \mu') \kappa \tau_{xy}(t) \Delta \bar{\varphi}_r(t) + 2(1 + \mu) \Delta \tau_{xy}(t),$$

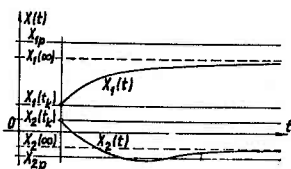
V rovnicích značí E modul pružnosti a μ Poissonovo číslo udávající příčné deformace pro pružný stav a μ' při dotvarování. Napětí $\sigma_x(t), \dots, \tau_{xy}(t), \dots$ můžeme též pokládat za funkce proměnné $\bar{\varphi}(t)$, tj. za složenou funkci t , neboť $\bar{\varphi}(t)$ je spojitá rostoucí funkce. Rovnice (4) pak můžeme dělit $\Delta \bar{\varphi}(t)$ a provést limitní přechod pro $\Delta \bar{\varphi}(t) \rightarrow 0$. Dostaneme tak

$$E \frac{d\varepsilon_x(t)}{d\bar{\varphi}} = \frac{d\sigma_x(t)}{d\bar{\varphi}} - \mu \frac{d\sigma_y(t)}{d\bar{\varphi}} - \mu \frac{d\sigma_z(t)}{d\bar{\varphi}} + \kappa \sigma_x(t) - \mu' \kappa \sigma_y(t) - \mu' \kappa \sigma_z(t) + E \kappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)},$$

$$E \frac{d\gamma_{xy}(t)}{d\bar{\varphi}} = 2(1 + \mu) \frac{d\tau_{xy}(t)}{d\bar{\varphi}} + 2(1 + \mu') \kappa \tau_{xy}(t), \quad (5)$$

Nevypisované čtyři rovnice dostáváme cyklickou záměnou x, y, z . Těmito šesti přetvárnými rovnicemi je systém rovnic doplněn na úplný systém parciálních diferenciálních rovnic, postačující spolu s okrajovými podmínkami tělesa a s počátečními podmínkami při $t = t_k$ k řešení problému. Řešením tohoto systému jsou např. napětí jako funkce $x, y, z, \bar{\varphi}(t)$. Poněvadž přetvárné rovnice jsou lineární, platí princip superposice zatížení. Hookeův zákon pružnosti je spec. případem rov. (5).

Definujme nyní *transformované těleso* jako takové pružné těleso, které je totožné s daným pružným tělesem, avšak má moduly pružnosti $E' = E/\kappa$ a Poissonova čísla μ' . Potom platí, že *partikulárním řešením je napjatost transformovaného tělesa pro dané zatížení a poměrná smrštění* $\kappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$ *při okrajových podmínkách platných v průběhu dotvarování*. Jsou to konstanty, které označme $\sigma_{xp}, \dots, \tau_{xy_p}, \dots$. O správnosti je možno se přesvědčit dosazením do rov. (5) s přihlédnutím k rovnicím statickým, geometrickým a kompatibilit. Z fyzikální povahy problému lze usoudit, že partikulární řešení odpovídá teoretickému případu $\varphi(t) \rightarrow \infty$, který ve skutečnosti nemůže nikdy nastat, liší-li se počáteční hodnoty od partikulárních, neboť napětí se pro $t \rightarrow \infty$ asymptoticky blíží k hodnotám, odpovídajícím limitní konečné hodnotě $\varphi(\infty)$ (viz obr. 3).



Obr. 3. Průběh namáhání konstrukce v závislosti na čase t .

Рис. 3. Изменение напряжения конструкции в зависимости от времени t .
Fig. 3. Variation of stress in structure in time t .

Z reologického hlediska představuje partikulární řešení bez smršťování napjatost na tělese z ideálně viskózního (vazkého) materiálu (kapaliny), u něhož napětí závisí přímo úměrně pouze na rychlosti přetváření podle $\varphi(t)$. Ježto beton je materiál viskoelastický (vazkopružný), musí skutečné řešení být přechodem mezi řešením na konstrukci pružné a viskózní.

Jednoduché řešení lze podat, je-li veškerý beton tělesa stejně starý, tj. $\kappa \equiv 1$, a je-li $\mu' = \mu$. Pak je $E' \equiv E$ a transformované těleso se ztotožní s daným tělesem. Porovnáme-li rov. (5) a rovnice kompatibility derivované podle $\varphi(t)$ s rovnicemi, vzniklými z rovnic (5) dosazením partikulárního řešení, a s rovnicemi kompatibility pro partikulární řešení, obdržíme

$$\frac{d\sigma_x(t)}{d\varphi} + \sigma_x(t) = \sigma_{xp}, \quad \frac{d\tau_{xy}(t)}{d\varphi} + \tau_{xy}(t) = \tau_{xy_p}, \quad (6)$$

neboť okrajové podmínky jsou pro $t > t_k$ neměnné. Odpovídají-li počátečním okrajovým podmínkám v čase t_k hodnoty $\sigma_x(t_k), \dots, \tau_{xy}(t_k), \dots$, mají rov. (6) řešení

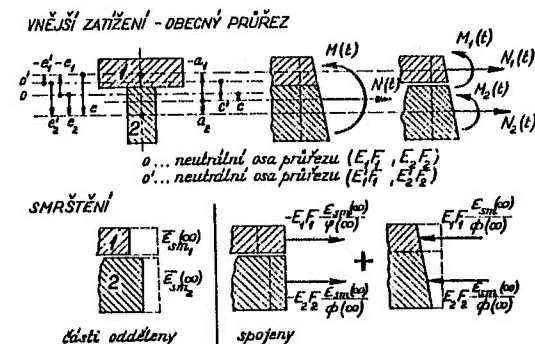
$$\begin{aligned} \sigma_x(t) &= \sigma_x(t_k) + [\sigma_{xp} - \sigma_x(t_k)] [1 - e^{-\varphi(t)}], \\ \tau_{xy}(t) &= \tau_{xy}(t_k) + [\tau_{xy_p} - \tau_{xy}(t_k)] [1 - e^{-\varphi(t)}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Všechna napětí probíhají podle téže funkce času [33]. Platí-li stejné okrajové podmínky pro všechna t a není-li smršťování, je $\sigma_x(t_k) = \sigma_{xp}, \dots$ a nedochází tedy vlivem dotvarování k žádným změnám napjatosti. Při rovinné napjatosti bychom též mohli analogicky k teorii pružnosti zavést funkci napětí, jež závisí na čase.

Odvodme nyní obecnou *variální formulaci* dotvarování a smršťování. Definujme napřed *přetvárný odpor* jako funkcionál $\Phi(t)$

$$\Phi(t) = \frac{d\Pi(t)}{d\varphi} + \Pi'(t) + \Pi'_{sm}(t), \quad (8)$$

kde značí $\Pi(t)$, resp. $\Pi'(t)$ přetvárnou energii daného pružného tělesa s moduly E , resp. transformovaného pružného tělesa s moduly $E' = E/\kappa$, odpovídající napětím v čase t . Je to energie vnitřních sil, která by se uvolnila odtížením tělesa v čase t . $\Pi'_{sm}(t)$ značí



Obr. 4. Průřez složený ze dvou částí, zatížený momentem a normální silou. Spec. spřažený průřez ocelobetonový a průřez předpjatý. Převedení smršťování na vnější zatížení průřezu.

Рис. 4. Сечение состоящее из двух частей, нагруженное моментом и нормальным усилием. Специально спаянный сталебетонный и предварительно напряженный сечения.

Fig. 4. Section consisting of two parts, loaded by moment and normal force. Shrinkage expressed in terms of external forces of section. Composite steel-concrete section and prestressed section.

virtuální práci napětí v čase t na poměrných protaženích $\kappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$, tj. na poměrných smrštěních. Výraz (8) můžeme rozepsat [33]

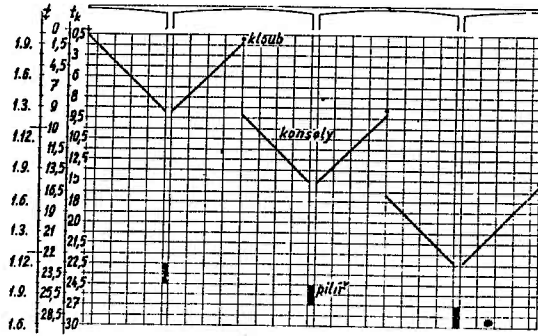
$$\begin{aligned} \Phi(t) = \int \int \int \left(\frac{d}{d\varphi} + \kappa \right) \frac{1}{2E} & [\sigma_x^2(t) + \sigma_y^2(t) + \sigma_z^2(t) - 2\mu (\sigma_x(t)\sigma_y(t) + \sigma_y(t)\sigma_z(t) + \\ & + \sigma_z(t)\sigma_x(t))] + 2(1 + \mu) (\tau_{xy}^2(t) + \tau_{yz}^2(t) + \tau_{zx}^2(t)) + (\sigma_x(t) + \sigma_y(t) + \\ & + \sigma_z(t)) \kappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \Big\} dx dy dz, \end{aligned} \quad (9)$$

kde O značí integraci přes celé těleso. $\Phi(t)$ je funkcionál funkcí $\sigma_x(t), \dots, \tau_{xy}(t), \dots$

Princip minima přetvárného odporu zní: Ze všech možných rovnovážných stavů napjatosti tělesa v čase t nastane ve skutečnosti ten, při kterém je přetvárný odpor $\Phi(t)$ minimem. Princip pro těleso neplatí-li, je-li $\mu' \neq \mu$ nebo uvažujeme-li objemové síly.

Princip minima přetvárného odporu vybírá ze všech možných rovnovážných změn

v čase t tu, která je v čase t též přetvárně možná, tj. vyhovuje podmínkám kompatibility. Jsou-li napětí konstantní, přechází v Castiglianův princip minima přetvárné práce, který je tedy jeho speciálním případem [3, 10, 34, 31a]. Uvedený princip umožňuje přibližná variační řešení.



Obr. 5. Příklad harmonogramu betonáže z návrhu mostů přes Vltavu pod Bulovkou.

Рис. 5. Пример часового плана бетонирования мостов через реку Влтаву под Буловкой в Праге.

Fig. 5. Example of time table of concreting of bridge by cantilever method over the Vltava River at Bulovka in Prague.

Princip lze dokázat analogií s teorií pružnosti. Je-li $\mu' = \mu$ a neuvažujeme-li objemové síly, můžeme porovnáním systému rovnic pro dotvarování a smršťování se systémem přetvárných rovnic pro pružný stav [11, 34] téhož tělesa pro dané zatížení a poměrná smrštění $\varepsilon_{sm}(\infty)$ zjistit, že první systém vznikne z druhého, zaměníme-li v něm $\frac{1}{E}$ za $\left(\frac{1}{E} \frac{d}{d\varphi} + \frac{1}{E'}\right)$; $\varepsilon_{sm}(\infty)$ za $\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{q(\infty)}$; $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ za $\sigma_x(t), \dots, \tau_{xy}(t), \dots$; $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$ za $\frac{d\varepsilon_x(t)}{d\varphi}, \dots, \frac{d\gamma_{xy}(t)}{d\varphi}$; u, v, w za $\frac{du(t)}{dt}, \dots$, což platí i pro okrajové podmínky. Můžeme se přesvědčit, že touž záměnou přechází také výraz pro přetvárnou práci pružného tělesa pro dané zatížení a poměrná smrštění $\varepsilon_{sm}(\infty)$ ve výraz (8) pro přetvárný odpor. Proto při minimu prvního výrazu nastává též minimum druhého výrazu. Při $\mu' \neq \mu$ nelze však najít jednotnou záměnu výrazů.

Nazveme-li funkce za integračním znaménkem v rov. (9) měrným přetvárným odporem $f(t)$, můžeme vzhledem k rov. (5) zjistit

$$\frac{\partial f(t)}{\partial \sigma_x} = \frac{d\varepsilon_x(t)}{d\varphi}, \quad \frac{\partial f(t)}{\partial \tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{xy}(t)}{d\varphi}, \quad \dots \quad (10)$$

Je zajímavé, že těleso se nepřetváří cestou nejmenšího přetvárného výkonu $A(t)$. Definujeme-li totiž $A(t)$ jako výkon vnitřních nebo vnějších sil tělesa podle proměnné $\varphi(t)$, čili

$$A(t) = \int \int \int \left(\frac{\sigma_x(t)}{E} \frac{d\varepsilon_x(t)}{d\varphi} + \dots + \frac{\tau_{xy}(t)}{G} \frac{d\gamma_{xy}(t)}{d\varphi} + \dots \right) dx dy dz \quad (11)$$

dostaneme dosazením z rov. (5)

$$A(t) = \frac{d\Pi(t)}{d\varphi} + 2\Pi'(t) + \Pi'_{sm}(t) = \Phi(t) + \Pi'(t). \quad (12)$$

Předpokládáme-li, že napjatost je od času t_k do t neměnná, a píšeme-li pro tento časový úsek přetvárné výminky, dostáváme partikulární řešení, neboť přetvárné výminky odpovídají modulům $\frac{E}{\varphi_r(t)} = \frac{E}{\kappa} \frac{1}{\varphi(t)}$ na pružné konstrukci. Má-li konstrukce (těleso) od počátku definitivní statické působení, můžeme do přetvárných výminek za předpokladu neměnné napjatosti do času t zahrnout i pružné deformace. Dostáváme tak přibližné řešení, odpovídající konstrukci o modulech $E_{bt}(t) = E/[1 + \varphi_r(t)]$, jež zvezme přetvárnými moduly. Jeho platnost je omezena na případy, kdy se nemění statické působení ani v čase t_k . Takovéto řešení je již užíváno u složených průřezů jako přibližné řešení pomocí ideálního průřezu. Poněvadž $E_{bt}(t_k) = E$, je splněna podmínka, že počáteční řešení je řešením pružným. Pro $\varphi_r(t) \rightarrow \infty$ je $E_{bt}(t) \rightarrow \frac{E}{\kappa} \frac{1}{\varphi(t)}$, čemuž odpovídá partikulární řešení. Předpokládáme-li pak, že s rostoucím $\varphi(t)$ se mění řešení přetvárnými moduly monotónně, sledujeme, že leží mezi řešením počátečním a partikulárním a vyhovuje tedy základním mezím řešení přesného. Jeho nevýhodou však je, že o velikosti těchto mezí nedává žádné představy.

3. Konstrukce s homogenními průřezí

Pro konstrukce složené z prutů, zvláště staticky neúčité rámové a prutové konstrukce, platí vše, co bylo odvozeno v odst. 2 pro tělesa. Lze však u nich dospět k podrobnějším dalším výsledkům. V tomto odstavci se budeme zabývat konstrukcemi s homogenními průřezí, jež mají v rozsahu každého průřezu beton stejného stáří. Jsou to např. letmo betonované či montované mosty, spojitě nosníky nebo rošty montované z prefabrikátů různého stáří nebo spolupůsobící s částmi později vybetonovanými nebo starými, nosníky spínané z různých starých dílců, zavěšené a visuté betonové mosty trámové aj. [obr. 6a), c), d), e), j)]. Podrobné řešení tohoto případu podal autor již v [2], takže se omezíme jen na stručný výklad.

K dané konstrukci K s moduly pružnosti E a Poissonovými čísly μ definujeme opět transformovanou konstrukci K' jako konstrukci stejného tvaru, avšak s moduly $E' = E/\kappa$, s Poissonovými čísly μ' a s odpovídajícími moduly pružnosti ve smyku $G' = E'/[2(1 + \mu')]$.

Je-li konstrukce K staticky určitá, nemění se při stálém zatížení vnitřní síly a platí [2], že její deformace vlivem dotvarování a smršťování od času t_k do t je rovna $\varphi(t)$ -násobku pružné deformace transformované konstrukce pro dané zatížení a poměrná smrštění $\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$. Táž věta platí i pro konstrukci staticky neurčitou, je-li homogenní a může-li se volně smršťovat.

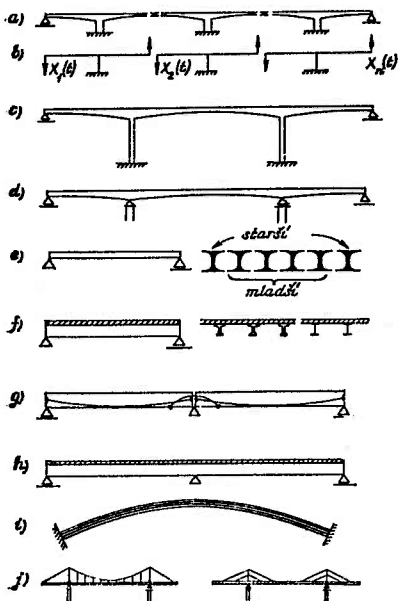
Mějme nyní staticky neurčitou konstrukci K , která přejde uvolněním n staticky neurčitých, na čase závislých vazeb $X_1(t), \dots, X_n(t)$ ve zvolenou základní soustavu, jež musí být buď staticky určitá, nebo — jsou-li její části homogenní a mohou-li se volně smršťovat — i staticky neurčitá. Označme $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{T}$ síly v průřezu r na základní soustavě od stálého zatížení a $\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{T}_i$ od zatížení veličinou $X_i = 1$. Do

stálého zatížení je třeba zahrnout též vliv předpětí. Síly $M(t)$, $N(t)$, $T(t)$ v průřezu s staticky neurčité konstrukce jsou

$$M(t) = \mathfrak{M} + \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i(t) \quad (13)$$

a obdobně pro $M(t)$ a $T(t)$.

V počátečních podmínkách pro $t = t_k$ je nutno vyjádřit případné změny statického působení a posuvy podpor v čase t_k . Počáteční hodnoty $X_i(t_k)$ jsou vždy hodnoty určené řešením statické soustavy pro $t > t_k$, přičemž pro staticky neurčité vazby,



— и) Последовательно бетонированная арка (напр. на жестком каркасе арматуры). — ж) Висячий железобетонный балочный мост.

Fig. 6. a) Console bridge concreted by cantilever method, multi-bay b. rigid frame with inserted hinges. — b) Choice of primary statically determinate system and of statically indeterminate quantities. — c) Multi-bay rigid frame without hinges cast by cantilever method. — d) Continuous beam cast by successive corbelling. — e) Grid composed of precast beams of various age. — f) Precast concrete or steel beams cooperating with a plate cast in situ. — g) Continuous beam assembled of precast elements. — h) Statically indeterminate structure with non-homogeneous sections — upper plate cast in situ. — i) Arch cast successively by layers (e. g. on rigid reinforcement). — j) Suspension concrete girder bridges.

přidané v čase t_k , jsou počáteční hodnoty nulové nebo hodnoty zavedené uměle (rektifikacemi).

Označme dále pružnou deformaci na základní statické soustavě dané konstrukce K ve smyslu $X_j(t)$ jako δ_j , je-li způsobena zatížením stálým, a jako δ'_{mj} , je-li

způsobena zatížením veličinou $\bar{X}_j = 1$. Obdobné pružné deformace na základní statické soustavě transformované konstrukce K' označme δ'_j a δ'_{mj} a deformaci od poměrných smrštění velikosti $\propto \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$ jako δ'_{smj} . U předpjeté konstrukce je nutno do členů δ'_j od stálého zatížení zahrnout též vliv předpětí, které je sice vlivem ztrát mírně proměnné, ale je možno jej zavést konstantní střední hodnotou, již obdržíme odečtením všech krátkodobých ztrát a zhruba jedné poloviny ztrát dotvarováním a smršťováním. Momenty v průřezech od předpětí ruší částečně momenty od vlastní váhy. Může se stát, že výsledné momenty v průřezu vyjdou nulové. Pak je vhodné uvážit v průřezích momenty při předpínací síle, změněné ca o ± 5 až 10% , neboť skutečná hodnota předpětí se může snadno lišit od vypočtené.

Sestavme nyní obecné přetvárné výminky. Představme si, že po malý časový okamžik Δt jsou uvolněny vazby $X_1(t)$, ..., $X_n(t)$. Ve smyslu těchto vazeb vzniknou za dobu Δt dotvarováním a smršťováním deformace, odpovídající na základní soustavě změně $\Delta \bar{\varphi}(t)$ součinitele dotvarování. Tyto plastické deformace musí být pak za dobu Δt anulovány pružnými deformacemi, způsobenými změnami $\Delta X_1(t)$, ..., $\Delta X_n(t)$ hodnot $X_1(t)$, ..., $X_n(t)$. Z této podmínky lze odvodit

$$\sum_{i=1}^n \delta'_{ij} \frac{dX_i(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n \delta'_{ij} X_i(t) + \delta'_j + \delta'_{smj} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (14)$$

což je systém n simultánních lineárních nehomogenních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty pro neznámé $X_j(t)$ jako funkce $\bar{\varphi}(t)$, tj. složené funkce t . Rovnice (14) lze též odvodit týmiž záměnami konstant, jako u tělesa. Rovnice (14) platí i pro $\mu' \neq \mu$.

Je to nejobecnější, v čase pojatý tvar přetvárných výminků staticky neurčité konstrukce, z něhož přetvárné výminky pro pružnou konstrukci plynou jako speciální případ pro $X_j(t) = \text{konst.}$ [11, 34].

Obecné řešení nehomogenního systému (14) dostaneme jako součet obecného řešení příslušného homogenního systému, tj. bez členů δ'_j a δ'_{smj} , a partikulárního řešení nehomogenního systému (14) — podrobně viz [29].

Partikulární řešení jsou konstanty X_{ip} , dané systémem n lineárních rovnic

$$\sum_{i=1}^n \delta'_{ij} X_{ip} + \delta'_j + \delta'_{smj} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (15)$$

kteří vyjadřují pružnou napjatost transformované konstrukce K' pro dané zatížení a poměrná smrštění $\propto \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$, podobně jako u tělesa. Tuto napjatost lze vypočíst známými metodami řešení rámu a prutových konstrukcí. Není-li konstrukce K výjimečným případem, platí totéž o K' , poněvadž je tvarově shodná s K . Systém (15) má pak jediné řešení.

Řešením homogenního systému jsou funkce $k_i e^{\lambda_i t}$, kde čísla λ a k_i lze určit dosazením do (14). Z podmínky $k_i \neq 0$ plyne pro λ algebraická rovnice n -tého stupně, zvaná charakteristická, daná determinantem

$$(\delta_{ij} \lambda + \delta'_{ij}) = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (16)$$

kteří má n kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, jež musí být reálné a záporné. Pro různá λ_j jsou funkce $e^{\lambda_j t}$ lineárně nezávislé. Je-li kořen λ_j m -násobný, odpovídá mu m lineárně nezávislých

řešení tvaru $k_i e^{\lambda_i \bar{\varphi}(t)}$, $k_i \bar{\varphi}(t) e^{\lambda_i \bar{\varphi}(t)}$, \dots , $k_i \bar{\varphi}(t)^{n-1} e^{\lambda_i \bar{\varphi}(t)}$, což platí, je-li hodnota matice determinantu (16) rovna $n - 1$. Jinak některá řešení $X_i(t)$ závisí na méně než n libovolných konstantách. Každé hodnotě λ_j přísluší n hodnot $k_j^{(1)}$, \dots , $k_j^{(n)}$, jež se určí jako čísla úměrná minorům některého řádku, a to libovolného, neboť vzhledem k (16) je tento poměr pro každý řádek stejný. [Pozn.: Minory jsou subdeterminanty, násobené postupně 1, $(-1)^1$, \dots , $(-1)^{n-1}$.]

Obecné řešení systému (14) pak je

$$X_i(t) = X_{i_0} + \sum_{j=1}^n C_j k_j^{(j)} e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (17)$$

kde však v případě násobného kořene λ_j je nutno $e^{\lambda_j \bar{\varphi}(t)}$ dosazovat násobené mocninami $\bar{\varphi}(t)$. Konstanty C_j se určí z počátečních hodnot $X_i(t_k)$. Z rov. (17) lze odvodit, že křivky průběhu $M(t)$, \dots mohou mít nejvýše $n - 1$ vrcholů, tj. lokálních extrémů (obr. 3). Obvykle však nemají žádný a bývá $X_i(t_k) \cong X_i(t) \cong X_i(\infty) \cong X_{i_0}$, což nastává nutně pro 1-krát staticky neurčitou konstrukci. Snadno lze se přesvědčit, že součiny $\lambda_j \bar{\varphi}(t)$, $\delta'_{ij} \bar{\varphi}(t)$ nezávisí na volbě t_k .

Při řešení ocelobetonové konstrukce, jako jsou např. zavěšené a visuté betonové mosty trámové, dosadí se pro ocelobetonové části $\kappa = 0$. Tyto mosty tvoří konstrukci předpjatou volnými kabely, jejichž kotevné tlaky S_i se zvolí za staticky neurčité, obvykle bez dalších staticky neurčitých, takže základní soustava je staticky neurčitá. Při určení deformací základní soustavy se nesmí zanedbat vliv průhybů nosníků na protažení kabelů.

Systém (14) lze též řešit převedením na jednu lineární diferenciální rovnici n -tého řádu pro jednu staticky neurčitou [32], nebo též rychle a elegantně Laplaceovou transformací (operátorovým počtem) [7].

V důsledku linearitě rovnic (15) a (5) zůstává v platnosti princip superposice zatížení. Zejména platí, že při neměnném statickém působení jsou vnitřní síly od dvou zatížení Z a Z^* , z nichž prvé působí již od času t_k a druhé přistoupilo až v čase $t_k^* (\geq t_k)$, rovny součtu vnitřních sil, které by vznikly v čase t vlivem zatížení Z a Z^* jednotlivě působících od časů t_k a t_k^* . Důkaz skýtá vztah

$$\begin{aligned} X_i(t) &= (X_{i_0} + X_{i_0}^*) + \sum_j (C_j e^{\lambda_j [\bar{\varphi}(t_k) - \varphi(t_k)]} + C_j^*) k_j^{(j)} e^{\lambda_j [\bar{\varphi}(t) - \varphi(t_k)]} = \\ &= \{X_{i_0} + \sum_j C_j k_j^{(j)} e^{\lambda_j [\bar{\varphi}(t) - \varphi(t_k)]}\} + \{X_{i_0}^* + \sum_j C_j^* k_j^{(j)} e^{\lambda_j [\bar{\varphi}(t) - \varphi(t_k)]}\}, \end{aligned} \quad (18)$$

který plyne z rov. (17), označíme-li $X_{i_0}^*$ a C_j^* veličiny odpovídající zatížení Z^* oddělené působícímu od času t_k^* .

Předložené řešení je vlastně zobecněním silové metody pro pružné konstrukce, neboť vychází z přetvárných výminek. Staticky neurčité je možno volit ortogonální jen částečně, tj. buď jen pro pružnou, nebo jen pro transformovanou konstrukci.

Konstanty λ_i a $k_i^{(j)}$ obecného řešení mají na hodnoty řešení menší vliv než X_{i_0} , a postačí je určit s menší přesností, zvláště s ohledem na to, že $\bar{\varphi}(t)$ nelze předem přesně určit. Při vícenásobné neurčitosti se výpočet stává neúměrně pracný k jeho významu. Pak je vhodné zjednodušit konstrukci na 1 až 2-krát stat. neurčitou, případně, aspoň to provést pro výpočet λ_i a $k_i^{(j)}$. Přesnější je, vyjdeme-li ze základní soustavy staticky neurčité, i když její části nejsou homogenní.

Určíme-li zjednodušeně λ na soustavě 1-krát staticky neurčité, dostaneme přibližný vzorec

$$X_i(t) = X_i(t_k) + [X_{i_0} - X_i(t_k)](1 - e^{-\frac{\delta'_{ii}}{\delta_{ii}} \bar{\varphi}(t)}), \quad (19)$$

který dává velmi dobré hodnoty, převažují-li v systému pružných přetvárných rovnic diagonální koeficienty δ_{ii} výrazně nad ostatními. Pro 1-krát staticky neurčitou konstrukci platí (19) přesně. Užití vzorce (19) většinou postačuje, přičemž však X_{i_0} je nejlépe určit na soustavě nezjednodušené.

Má-li konstrukce od počátku definitivní statické působení, lze užít též řešení přetvárnými moduly (viz odst. 2).

Jako speciální případ lze z rov. (14) určit vliv změny statického působení a smršťování a dotvarování pro konstrukci z betonu stejného stáří, u níž je $\mu' = \mu$ nebo $\mu' \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$. Poněvadž je $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$, $\delta'_j = \delta_j$, $\delta'_{smj} = \delta_{smj}$ pro všechna i, j , ztotožní se konstrukce transformovaná s danou. Partikulární řešení je rovno pružnému řešení pro dané stálé zatížení včetně předpětí a poměrná smrštění $\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{q(\infty)}$ na statické soustavě zavedené v čase t_k [12, 23, 33]. Porovnáme-li po dosazení rov. (14) a (15), obdržíme

$$\frac{dX_i(t)}{d\bar{\varphi}} + X_i(t) = X_{i_0}, \quad i = 1, \dots, n \quad (20)$$

$$X_i(t) = X_i(t_k) + [X_{i_0} - X_i(t_k)](1 - e^{-\bar{\varphi}(t)}), \quad (21)$$

kde (21) je řešení rov. (20). Všechny vnitřní síly se mění podle téže funkce $(1 - e^{-\bar{\varphi}(t)})$. Z rov. (21) vyplývá též známý fakt, že nezmění-li se statické působení, nena-tane posuv podpora a může-li se konstrukce volně smršťovat, nepůsobí samo dotvarování při stejné starém betonu a při $\mu' = \mu$ žádnou změnu napjatosti.

Výraz (8) pro přetvárný odpor lze pro konstrukci upravit na tvar

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{d}{d\bar{\varphi}} \int_K \left[\frac{M^2(t)}{EJ} + \frac{N^2(t)}{EF} + \frac{\alpha T^2(t)}{GF} \right] + \int_K \left[\frac{M^2(t)}{E'J} + \frac{N^2(t)}{E'F} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha T^2(t)}{G'F} \right] ds + \int N(t) \kappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} ds, \end{aligned} \quad (22)$$

který na rozdíl od rovnic pro těleso platí i pro $\mu' \neq \mu$. Číslo α značí rozdělovací číslo smyku. Podmínky lokálního minima výrazu $\Phi(t)$ jsou $\frac{\partial \Phi(t)}{\partial X_i} = 0$ pro všechna

$i = 1, \dots, n$ a $\frac{\partial^2 \Phi(t)}{\partial X_i^2} > 0$. Provedeme-li ve výrazu (19) parciální derivace a do-

sadíme-li za $M(t)$, $N(t)$, $T(t)$ podle (13) $\left(\frac{\partial M(t)}{\partial X_i} = \bar{M}_i \right)$, obdržíme rov. (14). Zpětně tím též plyne platnost principu minima přetvárného odporu pro konstrukce.

Hledejme nyní deformaci $\delta(t)$ od dotvarování a smršťování od času t_k do t ve smyslu statické veličiny $\bar{X} = 1$, která na staticky neurčité transformované konstrukci způsobuje průřezové síly \bar{M}' , \bar{N}' , \bar{T}' . Na transformované konstrukci označme dále $\delta'_{ei}(t)$, resp. $d\delta'_{ei}(t)$, resp. δ'_{ei} pružnou deformaci ve smyslu \bar{X} , odpovídající hodnotám $M(t)$, $N(t)$, $T(t)$, resp. $dM(t)$, $dN(t)$, $dT(t)$, resp. M_p , N_p , T_p a δ'_{sm} deformaci ve smyslu veličiny \bar{X} odpovídající poměrným smrštěním $\kappa \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$. Konečně $\delta_{ei}(t)$ označme obdobnou deformaci na dané pružné staticky neurčité konstrukci. Změna $d\delta(t)$ de-

formace se skládá z deformace dotvarováním pro hodnoty $M(t)$, $N(t)$, $T(t)$, z deformace smrštění a z deformace, způsobené změnami $dM(t)$, $dN(t)$, $dT(t)$

$$d\delta(t) = (\delta'_{ci}(t) + \delta'_{sm}) d\bar{\varphi}(t) + d\delta_{ei}(t). \quad (23)$$

Integrací od t_k do t a dosazením z rov. (13) dostaneme po úpravách

$$\delta(t) = \delta_{ei}(t) - \delta_{ei}(t_k) + \varphi(t) (\delta'_{ei}(t) + \delta'_{sm}) + \sum_{i=1}^n \int_0^{\bar{\varphi}(t)} [X_i(t) - X_{ip}] d\bar{\varphi} \int_K \left(\frac{\overline{M'}\overline{M}_i}{E'J} + \frac{\overline{N'}\overline{N}_i}{E'F} + \frac{\alpha\overline{T'}\overline{T}_i}{G'F} \right) ds, \quad (24)$$

kde poslední člen můžeme dosazením z přibližného vzorce (19) upravit

$$\sum_{i=1}^n \dots = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{ii}}{\delta'_{ii}} (1 - e^{-\frac{\delta'_{ii}}{\delta_{ii}} \bar{\varphi}(t)}) [X_i(t_k) - X_{ip}] \int_K \left(\frac{\overline{M'}\overline{M}_i}{E'J} + \dots \right) ds \doteq \frac{1 - e^{\lambda' \bar{\varphi}(t)}}{-\lambda'} (\delta_{ei}(t_k) - \delta'_{ei}). \quad (25)$$

V posledním přibližném tvaru λ' značí průměr hodnot $-\frac{\delta'_{ii}}{\delta_{ii}}$. Tvar (25) platí přesně pro 1-krát stat. neurčitou konstrukci a taktéž pro konstrukci z betonu stejného stáří a $\mu' = \mu$ ($\lambda' = -1$), pro níž při neměnnosti statického působení v čase t_k se výraz (25) zjednodušuje dosazením $\delta_{ei}(t_k) = \delta'_{ei}$.

Derivujeme výraz (22) podle X , do vzniklého výrazu podle teorie pružnosti dosadíme $\frac{\partial II(t)}{\partial X} = \delta_{ei}(t)$, $\frac{\partial II'(t)}{\partial X} = \delta'_{ei}(t)$, $\frac{\partial II'_{sm}}{\partial X} = \delta'_{sm}$ a porovnejme jej s rovnicí (23) dělenou $d\bar{\varphi}$. Dostaneme tak (při $\mu' = \mu$ platí i pro těleso)

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial X} = \frac{d\delta(t)}{d\bar{\varphi}}. \quad (26)$$

K přesnému řešení konstrukcí s nehomogenními průřezy budeme potřebovat přetvárné výminky zobecnit pro proměnné zatížení. Časově proměnné vnější zatížení nechť způsobí na transformované základní statické soustavě deformace $\delta'_i(t)$ a na dané pružné konstrukci $\delta(t)$. Přírůstek průhybu za dobu Δt v čase t od dotvarování, smršťování a změny vnějšího zatížení je $\Delta \bar{\varphi}(t) [\delta'_i(t) + \delta'_{sm_i}(t)] + \Delta \delta_i(t)$. Odtud lze odvodit přetvárné rovnice

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{dX_j(t)}{d\bar{\varphi}} + \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j(t) + \delta'_i(t) + \frac{d\delta_i(t)}{d\bar{\varphi}} + \delta'_{sm_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (27)$$

v nichž absolutní členy jsou funkce času. Je-li zatížení proměnné exponenciálně podle $\bar{\varphi}(t)$, jsou $\delta'_i(t)$ a $\frac{d\delta_i(t)}{d\bar{\varphi}}$ též exponenciálními funkcemi $\bar{\varphi}(t)$. Předpokládejme jednoduše, že absolutní člen má přibližně průběh

$$\delta'_i(t) + \frac{d\delta_i(t)}{d\bar{\varphi}} + \delta'_{sm_i} = \delta'_{Ai} + \delta'_{Bi} e^{\beta \bar{\varphi}(t)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (28)$$

kde δ_{Ai} , δ_{Bi} a β jsou konstanty.

Řešení systému diferenciálních rovnic (26) se od (14) liší pouze v partikulárním řešení, které je třeba hledat ve tvaru

$$X_{i_p}(t) = X_{Ai} + X_{Bi} e^{\beta \bar{\varphi}(t)} + X_{Ci} \bar{\varphi}(t) e^{\beta \bar{\varphi}(t)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (29)$$

Dosazením do (26) dostaneme rovnice pro konstanty X_{Ai} , X_{Bi} , X_{Ci}

$$\sum_j \delta'_{ij} X_{Aj} + \delta'_{Ai} = 0, \quad (30)$$

$$\sum_j (\beta \delta_{ij} + \delta'_{ij}) X_{Bj} + \sum_j \delta_{ij} X_{Cj} + \delta'_{Bi} = 0, \quad (31)$$

$$\sum_j (\beta \delta_{ij} + \delta'_{ij}) X_{Cj} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (32)$$

Napřed určíme kořeny λ_i charakteristické rovnice. Je-li $\lambda_i \neq \beta$ pro všechna i , plyne z rov. (32) $X_{Ci} = 0$ a partikulární řešení má tvar $X_{i_p} = X_{Ai} + X_{Bi} e^{\beta \bar{\varphi}(t)}$, kde X_{Ai} plyne ze systému rovnic (30) a X_{Bi} ze systému (31). Je-li $\lambda_i = \beta$ pro některé i , stačí vypočítat pouze konstanty X_{Ai} , protože neznámé konstanty X_{Bi} splývají s konstantami C_i . Z podmínky řešitelnosti systému (31) se určí konstanty X_{Cj} ve tvaru $C_k^{(j)}$.

4. Konstrukce s nehomogenními průřezy

Stáří betonu může být proměnné nejen po délce konstrukce, ale i v rozsahu jejich průřezů, které se tak stávají nehomogenními. Patří sem např. mosty, u nichž se na prefabrikované nosníky betonuje horní deska, sprážená nosníky ocelobetonové, nosníky z předpjatého betonu, oblouky betonované na samonosné výztuži ap. Nehomogenita průřezů obecně způsobuje přesuny vnitřních sil mezi průřezy, přičemž zároveň rozdělení vnitřních sil průřezu na jeho části je časově proměnné.

Pro řešení konstrukce s nehomogenními průřezy jako celku lze opět užít rovnic (14) nebo (19). Vyjma konstrukce staticky určité je však řešení pouze přibližné. Odvodit je to možno tak, že se vyjádří ohybová deformace složeného průřezu podle rovnic (24) a (35), přičemž se zanedbají členy malých hodnot. Partikulární řešení odpovídá konstrukci s transformovanými průřezy. Zatížení průřezů vychází obecně proměnné. Nemělo by však smyslu počítat s proměnou průřezových sil, kdybychom neuvážili eventuální zmenšení působící části některých průřezů o taženou betonovou část, což může nastat např. v oblasti záporných momentů spojitěho nosníku s dodatečně vybetonovanou horní deskou [obr. 6h]).

Zkoumejme nyní nehomogenní průřez složený z n homogenních částí, zatížený průřezovými silami obecně proměnnými. Naší úlohou je určit rozdělení průřezových sil na jednotlivé části průřezu v čase t . K tomu musíme matematicky vyjádřit přetvárnou výminku, což je zde Navierova hypotéza o zachování rovinnosti průřezů, která musí platit i pro dotvarování a smršťování.

Průřez z n částí je $2(n-1)$ krát staticky neurčitý, neboť pootočení a protažení částí 2, ..., n v jednom vlákne musí být stejné jako u části 1. Přetvárné výminky pružného složeného průřezu mají tvar systému $2(n-1)$ lineárních rovnic, jež můžeme považovat za přetvárné výminky nějaké pružné konstrukce. Věty, jež jsme odvodili pro konstrukce, lze tedy aplikovat i pro složený průřez. Tedy např. lze opět přetvárné výminky získat odvozenými záměnami konstant z přetvárných výminek pružného průřezu, určovat jejich koeficienty na pružném a transformovaném průřezu atd.

Musíme přitom získat tytéž rovnice jako při přímém odvození, jímž se ale již zabývat nebudeme.

Nejčastější je souměrný průřez, složený ze dvou homogenních částí o modulech E_1 a E_2 a koeficientech afinity dotvarování κ_1 a κ_2 (obr. 4). Plochy, centrální momenty setrvačnosti a poloměry setrvačnosti částí označme $E_1 J_1$, J_1 , i_1 , resp. $E_2 J_2$, J_2 , i_2 (> 0). Vzdálenost jejich těžišť označme e . Jednotlivé části mají od neutrální osy pružného průřezu ($E_1 F_1$, $E_2 F_2$), resp. transformovaného průřezu ($E'_1 F_1$, $E'_2 F_2$) excentricity e_1 , e_2 , resp. e'_1 , e'_2 . Průřez nechť je zatížen momentem $M(t)$ a normálnou silou $N(t)$, působící ve vzdálenostech a_1 , resp. a_2 od těžišť částí průřezu, ve vzdálenosti c resp. c' od neutrální osy pružného, resp. transformovaného průřezu. Tyto délky jsou orientované s kladným smyslem shora dolů (obr. 4). Platí zde geometrické vztahy: $a_2 - a_1 = e_2 - e_1 = e'_2 - e'_1 = e$, $c = e_1 - a_1 = e_2 - a_2$, $c' = e'_1 - a_1 = e'_2 - a_2$ a statické vztahy: $E_1 F_1 e_1 + E_2 F_2 e_2 = 0$, $E'_1 F_1 e'_1 + E'_2 F_2 e'_2 = 0$. Je-li $N(t) = 0$, lze volit např. $a_1 = 0$, $a_2 = e$.

Působení sil $M(t)$ a $N(t)$ na složený průřez lze nahradit působením sil $M_1(t)$ a $N_1(t)$, resp. $M_2(t)$, $N_2(t)$ na část 1, resp. 2 v jejím těžišti. Rovnováha průřezu vyžaduje

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t), \quad (33)$$

$$M(t) = M_1(t) + M_2(t) + N_1(t) a_1 + N_2(t) a_2.$$

Pro $M_1(t)$, $N_1(t)$, $M_2(t)$, $N_2(t)$ máme jen dvě rovnice rovnováhy a je tudíž nutno dvě veličiny, např. $M_1(t)$, $N_1(t)$, zvolit za staticky neurčitě a určit je z přetvárných výminek, vyjadřujících zachování rovinnosti složeného průřezu. K tomu je nutno a stačí, aby rovnovážná relativní deformace obou částí od sil $M_1(t)$, $N_1(t)$, $M_2(t)$, $N_2(t)$ ve smyslu sil M_1 a N_1 byla nulová. To je vlastně podmínka silové metody a proto podle (14) platí

$$\delta_{1MM} \frac{dM_1(t)}{d\varphi} + \delta_{1MN} \frac{dN_1(t)}{d\varphi} + \delta'_{1MM} M_1(t) + \delta'_{1MN} N_1(t) + \delta'_{1M} + \delta'_{sm1M}(t) = 0, \quad (34)$$

$$\delta_{1MN} \frac{dN_1(t)}{d\varphi} + \delta_{1NN} \frac{dN_2(t)}{d\varphi} + \delta'_{1MN} M_1(t) + \delta'_{1NN} N_1(t) + \delta_{1N}(t) + \delta'_{sm1N}(t) = 0,$$

kde koeficienty δ_{1MM} , ... je třeba podle této podmínky určit.

Nejjednodušeji je to možné principem virtuálních prací podle nezávislých rovnovážných stavů obou částí (základní soustava). Při $M(t) = N(t) = 0$ můžeme volit tyto stavy: 1. $M_1 = 1$, $N_1 = 0$, čemuž podle (33) přísluší $M_2 = -1$, $N_2 = 0$, 2. $M_1 = 0$, $N_1 = 1$, čemuž podle (33) přísluší $M_2 = e$, $N_2 = -1$. Při zatížení $M(t)$, $N(t)$ základní soustavy můžeme volit stav $M_1 = N_1 = 0$, čemuž podle (33) přísluší $M_2 = M(t) - N(t)a_2$, $N_2 = N(t)$. Pro zatížení smrštěním jsou deformace základní soustavy ve smyslu N_1 , resp. N_2 rovny $\kappa_1 \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$, resp. $\kappa_2 \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$. Principem virtuálních prací pak plyne

$$\delta_{1MM} = \frac{1}{E_1 J_1} + \frac{1}{E_2 J_2}, \quad \delta_{1MN} = -\frac{e}{E_2 J_2}, \quad \delta_{1NN} = \frac{1}{E_1 F_1} + \frac{e^2}{E_2 J_2} + \frac{1}{E_2 F_2}, \quad (35a)$$

$$\delta'_{1MM} = \frac{\kappa_1}{E_1 J_1} + \frac{\kappa_2}{E_2 J_2}, \quad \delta'_{1MN} = -\frac{e\kappa_2}{E_2 J_2}, \quad \delta'_{1NN} = \frac{\kappa_1}{E_1 F_1} + \frac{e^2\kappa_2}{E_2 J_2} + \frac{\kappa_2}{E_2 F_2}, \quad (35b)$$

$$\delta'_{1M} = -\left(M(t) - N(t) a_2\right) \frac{\kappa_2}{E_2 J_2} - \left(\frac{dM(t)}{d\varphi} - \frac{dN(t)}{d\varphi} a_2\right) \frac{1}{E_2 J_2},$$

$$\delta'_{1N} = \left(M(t) - N(t) a_2\right) \frac{e\kappa_2}{E_2 J_2} - N(t) \frac{\kappa_2}{E_2 F_2} + \left(\frac{dM(t)}{d\varphi} - \frac{dN(t)}{d\varphi} a_2\right) \frac{e}{E_2 J_2} - \frac{dN(t)}{d\varphi} \frac{1}{E_2 F_2}, \quad (35c)$$

$$\delta'_{sm1M} = 0, \quad \delta'_{sm1N} = (\kappa_1 - \kappa_2) \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}.$$

Koeficienty rovnic pro přímý výpočet $M_2(t)$ a $N_2(t)$ plynou záměnou indexů 1 a 2 a e za $-e$. Lze se přesvědčit, že dávají charakteristickou rovnici s týmiž koeficienty, a tedy i s týmiž kořeny λ_1 , λ_2 , což je v souladu s rov. (33).

Počáteční řešení je dáno buď hodnotami na začátku zavedenými, nebo hodnotami od počátečního vnějšího zatížení $M(t_k)$, $N(t_k)$

$$M_1(t_k) = \frac{[M(t_k) + N(t_k) c] i_1^2}{i_1^2 + e_1^2 + \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} (i_2^2 + e_2^2)}, \quad N_1(t_k) = \frac{N(t_k)}{1 + \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1}} + \frac{e_1}{i_1^2} M_1(t_k). \quad (36)$$

Pro nejčastější případ neměnného zatížení $M(t) = M$, $N(t) = N$ lze snadno určit též partikulární řešení, které je konstantou. Je to řešení pružného transformovaného průřezu ($E'_1 F_1$, $E'_2 F_2$). Účinky smrštění $\varepsilon_{sm} < 0$ přitom stanovujeme podle obr. 4 tak, že smrštění $\kappa_1 \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$, resp. $\kappa_2 \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$ částí oddělených zrušíme napřed tahovými silami $-\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} E_1 F_1$, resp. $-\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} E_2 F_2$, které necháme působit s opačným znaménkem na složený průřez a tyto dva stavy pak superponujeme. Dostaneme tak

$$M_{1p} = \frac{M + Nc' + \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} (e'_1 E_1 F_1 + e'_2 E_2 F_2)}{i_1^2 + e_1^2 + \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} (i_2^2 + e_2^2)} i_1^2, \quad (37)$$

$$N_{1p} = M_{1p} \frac{e'_1}{i_1^2} + \frac{N + \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \left(1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) E_2 F_2}{1 + \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} \frac{\kappa_1}{\kappa_2}}$$

a obdobně pro M_{2p} a N_{2p} .

Pro ootočení složeného průřezu platí vzorec odvozený pro deformaci konstrukce.

Výrazy (35a, b, c), (37) jsou ve shodě s výsledky, které odvodil přímým způsobem bez vlivu smršťování a při neměnném zatížení již U. Rühle [24]. Zde je ukázán statický význam koeficientů. Přibližně lze $M_1(\infty)$, ... určit podle (19). Nahradí se tím dosud obvyklé přibližné řešení přetvárnými moduly $E_{od}(t) = E/[1 + \bar{\varphi}_i(t)]$, které leží také mezi řešením pružným a partikulárním.

Jako speciální případ můžeme řešit sprážený ocelobetonový průřez pod neměnným zatížením. Nechť část 1 je tvořena betonem a část 2 ocelí (obr. 4). V dalším píšeme místo 1 index b (beton) a místo 2 index a (ocel). Předpokládejme $i_b > 0$, $i_a > 0$. Platí

$\kappa_a = 0$ a můžeme položit $\kappa_b = 1$. Dále též je $e'_b = -e$, $e'_a = 0$, $c' = -a_a$. Neutrálná osa transformovaného průřezu prochází těžištěm ocelové části. Řešení spráženého průřezu dostaneme dosazením do obecných vzorců jako jejich spec. případ.

Koeficienty $\delta_{b_{MM}}$, $\delta_{b_{MN}}$, $\delta_{b_{NN}}$ zůstávají stejné (35a). Ostatní koeficienty se zjednoduší na

$$\delta'_{b_{MM}} = \frac{1}{E_b J_b}, \quad \delta'_{b_{MN}} = 0, \quad \delta'_{b_{NN}} = \frac{1}{E_b J_b}, \quad (38)$$

$$\delta'_{a_M}(t) = \delta'_{a_N}(t) = \delta'_{a_{MN}} = 0, \quad \delta'_{a_{MN}} = \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}.$$

Partikulární řešení dostaneme jako limitu výrazu (37) pro $\kappa_2 \rightarrow 0$.

$$M_{b_p} = 0, \quad N_{b_p} = -\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} E_b F_b, \quad (39)$$

$$M_{a_p} = M - Na_b - \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} E_b F_b e, \quad N_{a_p} = N + \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} E_b F_b.$$

Při partikulárním řešení přenáší veškeré zatížení ocelobetonová část průřezu. Pro přímý výpočet $M_a(t)$, $N_a(t)$ je $\delta'_{a_{MM}} = \delta'_{b_{MM}}$, $\delta'_{a_{MN}} = \delta'_{b_{MN}}$, $\delta'_{a_{NN}} = \delta'_{b_{NN}}$.

Dalším speciálním případem je *průřez z předpjatého betonu* s kabely spolupůsobícími. Byla-li konstrukce předepnuta až po zavedení zatížení, rovnají se počáteční hodnoty zavedeným silám kabelů, zmenšeným o počáteční a krátkodobé ztráty. Transformovaný průřez se řeší bez předpětí, pouze pod vnějším zatížením a smršťením $\varepsilon_{sm}(\infty)$.

Počáteční hodnoty od zatížení, které přistoupilo až po zavedení předpětí, se vypočtou opět podle vzorců (36).

Uvažujeme-li, že všechny kabely mají *přibližně stejnou excentricitu*, je $J_a = i_a = 0$, $F_a > 0$. Kabely nepřenesí momenty (obr. 4). Myslíme si je soustředěny v jejich těžišti. Zřejmě je $M_a(t) = 0$, takže zůstávají jen 3 neznámé $M_b(t)$, $N_b(t)$, $N_a(t)$, vázané dvěma podmínkami rovnováhy (33). Úloha je tedy jedenkrát staticky neurčitá a vede jen na jednu diferenciální rovnici o jedné neznámé. Všechny koeficienty vyjma $\delta_{a_{NN}}$ a $\delta'_{a_{NN}}$ nemají smyslu, neboť byly odvozeny pro nezávislé rovnovážné stavy základní soustavy, při nichž je $M_a \neq 0$. Koeficienty $\delta_{a_{NN}}$ a $\delta'_{a_{NN}}$ platí i pro tento případ a máme tedy pro $N_a(t)$

$$\delta_{a_{NN}} \frac{dN_a(t)}{dt} + \delta'_{a_{NN}} N_a(t) + \delta'_{a_N} + \delta'_{a_{MN}} = 0. \quad (40)$$

Dosazením do (35a, b) nebo přímým výpočtem dostaneme

$$\delta_{a_{NN}} = \frac{1}{E_b F_b} + \frac{e^2}{E_b J_b} + \frac{1}{E_a F_a}, \quad \delta'_{a_{NN}} = \frac{1}{E_b F_b} + \frac{e^2}{E_b J_b}.$$

Odtud lze vypočítat

$$\lambda = -\frac{\delta'_{a_{NN}}}{\delta_{a_{NN}}} = -\frac{1}{1 + \frac{i_b^2}{e^2} + \frac{E_b F_b}{E_a F_a}}. \quad (41)$$

Stejně λ platí též pro průběh $M_b(t)$, $N_b(t)$ a ostatních statických veličin průřezu.

Partikulární řešení lze obdržet buď přímým výpočtem podle teorie pružnosti na pružném transformovaném průřezu pro zatížení M , N (bez předpětí) a smršťení betonové části $\frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}$, nebo dosazením do obecných vzorců a určením limity ($\kappa_a \rightarrow 0$, $e'_a \rightarrow 0$, $i_a = 0$)

$$M_{b_p} = \left(M - Na_a - \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} E_b F_b e \right) \frac{i_b^2}{i_b^2 + e^2}, \quad M_{a_p} = 0, \quad (42)$$

$$N_{b_p} = -\frac{(M - Na_a) e + \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} E_b J_b}{i_b^2 + e^2}, \quad N_{a_p} = \frac{(M - Na_a) e + \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} E_b J_b}{i_b^2 + e^2} + N.$$

Vzorce (36) pro počáteční hodnoty od zatížení zavedeného až po předepnutí se zjednodušují dosazením $i_a = 0$, čímž dostáváme $M_a(t_k) = 0$ a $N_a(t_k)$. Záměnou 1 a 2 ve (36) dále vyjde

$$M_b(t_k) = \frac{[M(t_k) + N(t_k)e]i_b^2}{i_b^2 + e^2 + \frac{E_a F_a}{E_b F_b} e_a^2}, \quad N_b(t_k) = \frac{N(t_k)}{1 + \frac{E_a F_a}{E_b F_b}} + \frac{e_b}{i_b^2} M_b(t_k). \quad (43)$$

Hodnoty $M_b(t)$, $N_b(t)$, $N_a(t)$ mají průběh

$$M_b(t) = M_{b_p} + [M_b(t_k) - M_{b_p}] e^{\lambda \bar{\varphi}(t)} \quad (44)$$

a obdobně pro $N_b(t)$, $N_a(t)$. Průběh stejného tvaru mají též napětí, $\sigma(t) = \sigma_p + [\sigma(t_k) - \sigma_p] e^{\lambda \bar{\varphi}(t)}$. Pro ztráty předpínací síly od dotvarování a smršťování vyplývá ze (44)

$$N_a(t) - N_a(t_k) = [N_{a_p} - N_a(t_k)] (1 - e^{\lambda \bar{\varphi}(t)}). \quad (45)$$

Výrazy (41) a (42) pro speciální případ $N = 0$ jsou ve shodě s výrazy, které odvodili již Busemann a Birkenmayer metodou dvou vláken [4a, 5]. Při návrhu plochy kabelů může být někdy výhodnější vycházet z hodnoty $N_a(\infty)$, vypočtené jako nejmenší možná předpínací síla k danému zatížení, a z ní pak určit potřebnou počáteční hodnotu $N_a(t_k)$. Podle (44) je

$$N_a(t) = N_{a_p} + [N_a(\infty) - N_{a_p}] e^{-\lambda[\bar{\varphi}(\infty) - \bar{\varphi}(t)]}. \quad (45')$$

Zajímavé je též řešení *spojitě nehomogenního průřezu* za platnosti Navierovy hypotézy. Necht y je osa souměrnosti průřezu v rovině působícího momentu s počátkem v těžišti, necht $\kappa = \kappa(y)$ je spojitě proměnné s pořadnicí y a má též spojitou 1. a 2. derivaci. Pro jednoduchost necht je E konstantní. Zachování rovinnosti průřezu vyžaduje $\frac{\partial^2 \varepsilon(y, t)}{\partial y^2} = 0$. Protože podle (5) platí $E \frac{\partial \varepsilon(y, t)}{\partial \bar{\varphi}} = \frac{\partial \sigma(y, t)}{\partial \bar{\varphi}} + \kappa(y) \sigma(y, t)$, dostáváme pro $\sigma(y, t)$ rovnici

$$\frac{\partial^2 \sigma(y, t)}{\partial \bar{\varphi} \partial y^2} + \kappa(y) \frac{\partial^2 \sigma(y, t)}{\partial y^2} + 2 \frac{d\kappa(y)}{dy} \frac{\partial \sigma(y, t)}{\partial y} + \frac{d^2 \kappa(y)}{dy^2} \sigma(y, t) = 0, \quad (46)$$

kteřá spolu se dvěma integrálními podmínkami rovnováhy průřezu $\int \sigma dF = N(t)$,

$\int y \sigma dF = M(t)$ určuje $\sigma(y, t)$. F značí plochu průřezu.

Řešením, které má spíše teoretický význam nemůžeme se však již zabývat. Uvedme jen, že napětí σ není obecně rozděleno přímkově po výšce y průřezu. Lze ukázat, že

přímkové rozdělení σ může nastat a nastane jen pro zcela speciální případ zatížení a průběhu $\kappa = \kappa(y)$, a to pro $\kappa(y) = \frac{C_2(t) M(t)}{yM(t) + i^2 N(t)} + C_1(t)$, přičemž $C_1(t)$, $C_2(t)$, $M(t)$, $N(t)$ musí být dány tak, aby κ nezáviselo na t . To nastane např. pro $\kappa(y) = C_1 + \frac{C_2}{C_3 y + i^2}$, $M(t) = C_3 N(t)$, kde C_1 , C_2 , C_3 jsou libovolné konstanty.

Při přesném zkoumání se jeví *staticky neurčitě momenty od předpětí* proměnné, jak vyplývá ze začátku tohoto odstavce. V praxi se však obvykle uvažuje jejich neproměnnost [23, 33], která ale platí jen přibližně, a to zanedbáme-li nehomogenitu průřezů (ocel—beton), vyvolávající proměnu předpínací síly vlivem ztrát dotvarováním a smršťováním (dosazujeme její střední hodnotu), neboť pak je při stejném stáří betonu transformovaná konstrukce totožná s danou.

Jestliže však byly po předpětí konstrukce připojeny k průřezům další části, jako např. deska vybetonovaná na pref. nosnících [obr. 6h], posune se neutrálná osa průřezů, změni se excentricity kabelů a v průřezech tedy působí předpětí jiné momenty na konstrukci transformované, než na dané pružné. Proměna veličin od předpětí je pak přibližně dána vzorcem (19). Přesnějším by bylo řešení podle (27) jako na konstrukci z homogenních průřezů pod proměnným zatížením předpětím. Pouze pro názor uvedme, že při uvážení nehomogenity průřezů (ocel — beton) je úloha neomezeněkrát staticky neurčitá, přičemž partikulární řešení je nulové, neboť neutrálné osy průřezů transformované konstrukce prochází těžišti kabelů.

5. Některé jiné případy

Řešení lze použít i na nehomogenní skořepiny — např. válcové *nádrže* vetknuté do staršího tuhého základu. Základní rovnice problému se určí např. z rovnice pro pružný stav dříve uvedenými záměnami konstant, jež však nelze aplikovat ve výsledném vztahu mezi samotnými deformacemi, ale již přímo v rovnicích rovnováhy vyjádřených ve vnitřních silách a v základních přetvárných rovnicích vyjadřujících závislost vnitřních sil na deformacích.

Dále uvažujeme volnou betonovou *desku*, centricky předpjatou ve dvou vzájemně kolmých *směrech* na normální rovnoměrná napětí $\sigma_1(t)$ a $\sigma_2(t)$ kabely o měrných plochách f_1 a f_2 na jednotku plochy příčného řezu desky. Základní soustava vznikne oddělením desky a kabelů. Přetvárnou podmínkou je, že poměrné protažení betonu (modul E_b) a kabelů (modul E_a) ve smyslu $\sigma_1(t)$ a $\sigma_2(t)$ jsou stejná. Z této podmínky dostáváme pro pružný a pro transformovaný systém ($\kappa_b = 1$, $\kappa_a = 0$)

$$\delta_{11} = \frac{1}{E_b} + \frac{1}{E_a f_1}, \quad \delta_{12} = -\frac{\mu}{E_b}, \quad \delta_{22} = \frac{1}{E_b} + \frac{1}{E_a f_2}, \quad (47a)$$

$$\delta'_{11} = \frac{1}{E_b}, \quad \delta'_{12} = -\frac{\mu'}{E_b}, \quad \delta'_{22} = \frac{1}{E_b}. \quad (47b)$$

Pro desku centricky předpjatou je $\delta'_1 = 0$, $\delta'_2 = 0$. Smrštění odpovídá

$$\delta'_{sm_1} = \delta'_{sm_2} = \frac{\varepsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}.$$

Členy δ_{12} a δ'_{12} způsobují, že ztráty předpětí jsou menší než u jednosměrně předpjaté desky, avšak jen tehdy, není-li $\mu = \mu' = 0$, kdy se úloha rozpadá na jednosměrně předpjatý systém. Zmenšení ztrát je tím slabší, čím je μ a μ' menší. Skutečné hodnoty μ' bylo

by vhodné ověřit zkouškami. Pro dotvarování bez smršťování a za přibližného předpokladu $\mu' = \mu$ podal přímé řešení tohoto případu již W. Swida [31].

Nehomogenitu dotvarování a smršťování se vyznačují též skelné lamináty, u nichž však ještě přistupuje výrazná ortotropie. Též zde by se mohlo uplatnit podobné upravené řešení.

6. Stručné závěry

1. U mnohých moderních betonových konstrukcí mohou být účinky dotvarování a smršťování značné a nelze je zanedbat.

2. Je nutno se snažit o omezení nepříznivých účinků, což ovlivňují tyto činitele:

a) Volba typu konstrukce, statického systému a poměry tuhostí jednotlivých částí. Tak např. menší účinky nastanou u rámu s ohebnějšími pilíři apod. Někdy je nutno vytvářet dilatace, klouby apod.

b) Poměr stálého a nahodilého zatížení. Je větší u mostů velkých rozpětí, kde jsou proto účinky dotvarování významnější.

c) Poměr stálého zatížení a předpětí. V průřezech předpjatých nosníků se totiž momenty od předpětí odčítají od momentů od stálého zatížení (malý rozdíl velkých čísel). Je jasné, že nejmenší účinky nastávají tehdy, je-li v průřezech tento rozdíl, tj. výsledný moment nulový. Avšak ani v takovém případě nelze považovat účinky dotvarování za nulové, neboť skutečná velikost předpínací síly se může snadno lišit od vypočtené. V takovém případě proto doporučujeme posoudit případ, kdy v průřezech působí předpínací síly, změněné asi o ± 5 až 10%. Poměr předpětí a stálého zatížení závisí na b) a dále na poměru napětí betonu a oceli (druh betonu) a excentricitě kabelu.

d) Posuvy podpor, změny statického působení a rektifikace.

e) Vlastnosti betonu (malý součinitel dotvarování).

f) Roční doba. Spadá-li stáří do letního období, účinky vzrůstají.

g) Postup výstavby konstrukce a tempo betonáže (obr. 5). Při rychlé betonáži jsou rozdíl stáří, a tím i výsledné účinky menší. Prvky montovaných konstrukcí mají být pokud možno stejně staré atd.

3. Účinků dotvarování lze též konstrukčně využít. Dotvarováním se redukuje účinky posuvu podpor a smršťování a účinky hydratačního tepla v betonových masivech. Dotvarováním se zapojí do akce přidaná část průřezu nebo konstrukce, jako např. horní deska vybetonovaná na pref. nosnících, části průřezu při postupném betonování na samonosné výztuži apod. Využití dotvarování by bylo možné též při skladbě prvků montované konstrukce, když např. vzhledem ke stáří prvků se zatížení stále přesouvá do prvků, které jsou od zatížení nahodilého méně využity.

LITERATURA

1. Aručunjan N. Ch., Někotoryje voprosy teorii polzručestii. Moskva—Leningrad 1952.
2. Bažant Z. P., Vliv dotvarování a smršťování u staticky neurčitých konstrukcí z betonu různého stáří. Inženýrské stavby č. 11, 1961. — 3. Brdička M., Mechanika kontinua. NČSAV, Praha 1959. — 4. Bechyně St., Betonové stavitelství III, sv. druhý, SNTL, Praha 1956. — 4a. Birkenmayer M., Die Berechnung der Spannungsverluste im vorgespannten Beton. Schweizerische Bauzeitung, č. 45, 1952. — 5. Busemann R., Kriechberechnung von Verbundträgern unter Benutzung von zwei Kriechfasern. Der Bauingenieur, č. 11, 1950. — 6. Bychawski Z., Resolving Kernel of the Volterra-Boltzman Equation in the Case of the Generalized Creep Function. Arch. Mech. Stos. 2, 1957. — 7. Churchill R. W., Modern Operational Mathematics in Engineering, Mc Graw Hill, New York 1944. — 8. Colonetti G., Deformazioni plastiche e deformazioni viscose. Pont. Ac. Acta, t. 6., 24. — 9. Graemer, Spannungsmlagerungen in Stahlbetontragwerken, die nachträglich verstärkt oder abschnittsweise hergestellt werden.

Ing. Archiv 14, S. 119, 1943. — 10. Graemer, Zusammenwirken alter und neuer Tragwerkteile. Beton- und Stahlbetonbau 48, S. 2, 1953. — 11. Dašek V., Statika rámových konstrukcí. NČSAV, Praha 1959. — 12. Dischinger Fr., Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere Bogenbrücken. Bauing. 1937, str. 437, 1939. — 13. Eimer Cz., Podstawy teorii pelzania ustrojów hiperstatycznych wstępnie sprężonych. Rozprawy inżynierskie, Warszawa 1957. — 14. Finsterwalder U., Knittel G., Die neue Moselbrücke in Koblenz. Bauingenieur, č. 8, 1954. — 15. Freundthal A. M., The Inelastic Behaviour of Engineering Materials and Structures. Wiley, New York 1950. — 16. Fröhlich, Theorie der Stahlverbundtragwerke. Bauing. S. 81, 1950. — 17. Goschy B., Berechnung der Stahlbeton-Fertigteil-Konstruktionen verbunden an Ort und Stelle, 5er Kongress für Int. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Str. 999, Lisabon 1956. — 18. Grigar K., Účinek dotlačování betonu při změně statického působení konstrukce. Inž. stavby č. 3, 1955. — 19. Janda L., Vliv dotlačování betonu a vliv proměny modulu pružnosti s časem na spojitě nosníky betonované vývojevou metodou. Sborník věd. prací ČVUT-FIS, SNTL, Praha 1958. — 20. Knittel G., Der Einfluß des Kriechens und Schwindens auf den Spannungszustand in Tragwerken aus vorgespanntem Beton. — 21. Klimeš J., Betonové mosty III (skripta). SNTL, Praha 1959. — 22. Kollár L., Die Wirkung des Schwindens und Kriechens des Betons auf eingebrachte Stahlbetonträger. Acta technica academiae scientiarum hungaricae, tom. XIV, str. 293, Budapest 1956. — 23. Leonhardt K., Předpjatý beton v praxi, SNTL (překlad z němčiny), Praha 1958. — 23a. Metěljuk N. S., Naprjaženija i deformacija v sborno-monolitnyh konstrukcijach ot usadki monolitnogo betona. Gidrotehničeskoe strojitelstvo, No. 1, Moskva 1961. — 24. Rühle U., Die Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen in Verbundkonstruktionen aus Stahlbetonfertigteilen mit Ortsbeton. Bauplanung Bautechnik 10, 1954. — 25. Rüşch H., Gedanken und Beispiele zum Bauen mit Fertigbauteilen aus Stahlbeton. Die Bautechnik, str. 179—178, 1944. — 26. Ržanicyn A. R., Nekotoryje voprosy mehaniki sistem deformirujuščichsja vo vremeni. Moskva—Leningrad 1949. — 27. Sattler K., Kriechen und Schwinden bei vorgespannten Verbund-Stahlbetonkonstruktionen. Bet. Stahlb., 1, 2, 1954. — 29. Stěpanov V. V., Kurs diferenciálních rovnic. Přir. vyd. (překlad z ruštiny), str. 310, Praha 1952. — 30. Stüssi F., Zur Relaxation von Stahldrähten. Abhandlungen-Int. Vereinigung für Brücken- und Hochbau, str. 273, 1959. — 31. Swida W., Zum Kriechproblem der in zwei Richtungen vorgespannten Platten und Scheiben. Abhandlungen, Int. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, str. 469, 1956. — 31a. Timoshenko S. P., Theory of Elasticity. Mc Graw Hill, New York, Londýn 1934. — 32. Vojtěch J., Základy matematiky. II. díl, Jedn. čes. mat. a fys., str. 356, Praha 1945. — 33. Zůda K., Navrhování konstrukcí z předpjatého betonu. SNTL, Praha 1958. — 34. Příručka pro stavební inženýry, I. díl, (překlad z němčiny), SNTL, Praha 1961.

Dopravoprojekt, Praha

Odevzdáno 19. 12. 1961

Diskusní příspěvky k tomuto článku (v rozsahu nejvíce 2 strany) prosíme poslat trojmo redakci časopisu do 31. 3. 1963, abychom je mohli uveřejnit v červencovém čísle.

Зденек П. Бажант

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ И УСАДКИ БЕТОНА НЕОДНОРОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И СЕЧЕНИЙ

Теория основана на упрощающем предположении Динингера, согласно которому деформации ползучести определены коэффициентом ползучести $\varphi(t)$ зависящим только от времени. В случае конструкций состоящих из бетона разного возраста надо учесть изменение атмосферических условий. Это возможно осуществить подставив в коэффициент $\varphi(t)$ приведенное время, в котором отдельные промежутки времени согласно сезону следует принять определенным произведением или дробью действительного времени. Для частей из бетона взаимно разного возраста применяем предположение аффинности кривых коэффициента ползучести. Кривая $\varphi_i(t)$ для части возраста t_i является аффинной с основной кривой $\varphi(t)$, таким образом, чтобы значения $\varphi_i(t)$ и $\varphi(t)$ для начального времени $t = t_i$ и для времени $t \rightarrow \infty$ не изменились и ось аффинности $\sigma \parallel t$. Тогда действует $\varphi_i(t) = \kappa \varphi(t)$ (1), где κ является коэффициентом аффинности ползучести [уравнение (2), рис. 1] для части возрастом t_i и $\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(t_i)$. Сталь

можно считать, что она бетон бесконечного возраста, $\kappa = 0$. Для деформаций ползучести применим коэффициент Пуассона μ' значением вообще разным от значения μ применяемого для упругого состояния. Усадку $\epsilon_{sm}(t)$ учитываем пропорционально $\varphi(t)$. Приведенные простые предположения позволят довести математическое решение к цели.

Решение напряженного состояния тела для постоянной нагрузки и усадки выражено уравнением равновесия, совместности деформаций и геометрическими уравнениями, к числу которых надо добавить уравнения деформаций шду

$$E \frac{d\epsilon_x(t)}{d\varphi} = \frac{d\sigma_x(t)}{d\varphi} - \mu \frac{d\sigma_y(t)}{d\varphi} - \mu \frac{d\sigma_z(t)}{d\varphi} + \kappa\sigma_x(t) - \mu'\kappa\sigma_y(t) - \mu'\kappa\sigma_z(t) + E\kappa \frac{\epsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \quad (5)$$

$$E \frac{d\gamma_{xy}(t)}{d\varphi} = 2(1 + \mu) \frac{d\tau_{xy}(t)}{d\varphi} + 2(1 + \mu') \kappa\tau_{xy}(t) \quad (x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x)$$

с граничными условиями тела и с начальными условиями для $t = t_i$.

Частное решение возможно определить в виде упругого напряженного состояния от так называемого трансформированного тела для заданной постоянной нагрузки и относительных усадок значения $\kappa \epsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Трансформированное тело тождественно с заданным телом, только вместо модулей упругости E имеются модули $E' = E/\kappa$. С точки зрения реологии частное решение представляет собой напряженное состояние тела из полне вязкого материала.

Для бетона одинакого возраста возможно найти общее решение [уравнение (6), (7)]. Если конструкция действует уже сначала в составе конечной статической системы, то напряжение во времени возможно определить приблизительно как напряжение так называемого идеального тела, имеющего так называемые модули деформации $E_{sm}(t) = E/[1 + \varphi_i(t)]$, что следует из предположения непрерывного напряженного состояния до времени t . Решение с применением модулей деформации состоит между упругими и частным решением.

Напряженное состояние вследствие ползучести и усадки возможно для $\mu' = \mu$ решить вариационным методом на основании принципа наименьшего деформационного сопротивления $\Phi(t)$, который избирает из всех возможных равновесных изменений напряженного состояния то изменение, которое возможно с точки зрения совместности деформаций. Тогда будет:

$$\Phi(t) = \frac{dII(t)}{d\varphi} + II'(t) + II'_{sm}(t), \quad (8)$$

где $II(t)$ или $II'(t)$ значат энергию деформации данного упругого тела имеющего модули E или трансформированного упругого тела модулей E' , ответствующего по напряжениям во времени t и $II'_{sm}(t)$ виртуальную работу напряжений во времени t на относительных удлинениях значениями $\kappa \epsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$.

У конструкций с однородными сечениями условия деформации имеют вид

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{dX_j(t)}{d\varphi} + \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j(t) + \delta'_i + \delta_{sm,i} \quad (14)$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$

Это представляет собой систему n симультанных линейных неоднородных дифференциальных уравнений 1-ого порядка для значений статически неопределимых величин $X_j(t)$, которую возможно вообще решить. Здесь δ_{ij} значит коэффициент упругости конструкции K , δ'_{ij} коэффициенты трансформированной конструкции K' имеющей модули упругости $E' = E/\kappa$; δ'_i члены от нагрузки для трансформированной конструкции и $\delta_{sm,i}$ деформации от относительных усадок $\kappa \epsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Условия деформации упругой конструкции являются частным случаем уравнений (14). Частное решение X_{ip} — уравнения (15) — представляет собой опять напряженное состояние трансформированной конструкции K для данной нагрузки и относительной усадки $\kappa \epsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Общее решение уравнения (17) — приобретает вид линейной комбинации экспоненциальных функций, которых экспоненты вытекают из решения характеристического уравнения (16) — n -той степени. Начальными условиями для времени $t = t_i$ возможно выразить влияние изменения статического действия конструкции. Для значений $X_i(\infty)$ на практике хватит применить простую приближительную формулу

(19). В случае бетона одинакового возраста решение имеет вид (22), (23). Деформацию $\delta(t)$ конструкции возможно выразить в виде (24) и приблизительно (25), где δ_n — упругая деформация и δ_{en} деформации от усадки $\propto \varepsilon_{en}(\infty)/\varphi(\infty)$.

Примером конструкций однородных сечений переменного возраста бетона являются консольные мосты созданные навесным бетонированием, разные сборные неразрезные балки или ростверки, при возведении которых как правило изменяется их статическое воздействие, и арки бетонированные на жестком каркасе арматуры, железобетонные балки и другие.

Более сложные обстоятельства характерны для конструкций неоднородных сечений. К ним относятся напр. мосты у которых на сборные балки надо дополнительно бетонировать верхнюю плиту, сопряженные стально-бетонные балки, предварительнонапряженные железобетонные конструкции и т. п. Прежде всего конструкцию надо решить как одно целое, в большинстве случаев приблизительно, и потому отдельные сечения под действием вообще переменной нагрузки, приблизительно экспоненциального вида (26).

Решением неоднородного сечения состоящего из данного числа однородных частей, аналогично решению конструкции, так как это сечение представляет собой ту-же упругую систему, в которой условия деформации заменены гипотезой Навье сохранения плоскости сечений. Для сечения как упругой системы составляющих ее частей поэтому в силе система (14), коэффициенты которой самым простым способом возможно определить с приложением начала виртуальных работ из независимых равновесных состояний частей сечений — уравнение (33) — из частей совместно действующих — уравнения (34), (35 a—d), рис. 4. Частное решение (37) сечения отвечает упругому трансформированному сечению состоящему из частей имеющих модули $E'_i = E_i/\kappa$ для данных внешних нагрузок M, N и усадок частей величиной $\propto \varepsilon_{en}(\infty)/\varphi(\infty)$. Приближенное решение выражено формулой (19). Как специальный случай мы получим решение сечения состоящего из стальной части с присоединенной бетонной плитой — (40) (45), если поставим для стальной части $\kappa = 0$. Частное решение определено опять трансформированным сечением, которого центр тяжести совпадает с центром тяжести стальной части. Предварительное напряжение сечения выражено в начальных условиях для $t = t_*$. Из решения вытекают тоже потери предварительного напряжения (45). Решение сечения непрерывно переменного возраста приводит к дифференциальному уравнению (46) в частных производных для напряжения, которое в общем случае по сечению линейно не распределено.

Применяя уравнения (14) возможно решить даже конструкции с свободными лучками или плитку с предварительным напряжением в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Удельная площадь лучков f_1 и f_2 — уравнение (46 a—c). Статически неопределимые силы, вызванные предварительным напряжением, в случае точного изучения являются также переменными величинами.

Теории ползучести и усадки в предлагаемой статье предлагается как одно целое и выражена одной основной формулировкой, из которой в качестве частных случаев вытекают просто так все предыдущие решения задач как и новые решения дальнейших задач. Из расчетов вытекают выводы для проектирования и прием возведения конструкций, которым возможно понизить отрицательные действия ползучести, или наоборот использовать их для конструктивных целей.

Замечания и отзывы к этой статье надо послать в трех копиях (не больше 2 страниц) редакции журнала до 31. 3. 1963 г., чтобы можно было опубликовать их в следующем номере.