

Bažant, Z.P. (1964). "Approximate methods of analysis of creep and shrinkage of complex nonhomogeneous structures and use of computers" (in Czech with English summary), *Stavebnícky časopis* (SAV, Bratislava), 12, 414–431.

STAVEBNÍCKY ČASOPIS

SEPARÁTNY VÝTLAČOK

VYDAVATEĽSTVO
SLOVENSKEJ AKADÉMIE VIED
BRATISLAVA

tické prípady nedosažiteľné a predstavujú krajné hranice. Vyrovnaná hodnota hygrometrickej zmeny sa dosahuje podobne ako pri ľahkých betónoch na báze umelého kamieniva za tých istých vlhkostí a úložných podmienok v období 300 až 400 dní.

Veľkosť deformácií z titulu hygrometrických zmien je funkciou množstva alebo prijatia vlhkosti.

Pre uvedený druh pórosilikátov je hodnota očakávanej veľkosti hygrometrickej zmeny daná rovnicou, ktorá bola zostrojená na základe schematického vzťahu (13):

$$\varepsilon_{b,t}^* = 4S_t K. \quad (14)$$

Platí pre teleso rozmerov $10 \times 10 \times 40$ cm, pričom

S_t — množstvo vyparovanej alebo prijatej vody v sledovanom čase t v tonách/m³,
 K — korekčný súčiniteľ, ktorý sa pohybuje od 0,8 do 1,3.

Pre vplyv geometrických rozmerov telesa na priebeh povrchových a osových hygrometrických zmien za konštantnej relatívnej vlhkosti platia tie isté zásady ako pri ľahkých betónoch na báze umelého kamieniva.

Odovzdané 20. 6. 1963

Diskusné príspevky k tomuto článku (v rozsahu najviac 2 strany) prosíme poslať trojmo redakcii časopisu do 31. 10. 1964, aby sme ich mohli uverejniť vo februárovom čísle 1965.

Франтишек Крумл

ДОЛГОВРЕМЕННЫЕ СВОЙСТВА ЛЕГКИХ БЕТОНОВ (Усадка и гидрометрические изменения)

В статье рассмотрены отдельные факторы, которые оказывают влияние на усадку и гидрометрические изменения легких бетонов и показана взаимосвязь между ними. На основе идеальной модели усадочных процессов автор делает вывод математического выражения процесса реакции и уравниенного значения усадки. Было установлено, что уравниенное значение усадки плотных бетонов на базе искусственных заполнителей достигается в период от 300 до 400 суток. То же самое установление действительно и для поросиликатов. Главными факторами для бетонов на базе искусственного заполнителя, предполагая постоянную температуру окружающего воздуха и размеров тела, являются множество цементного связывающего вещества и относительная влажность среды. Эти определения можно использовать для математического выражения процессов усадки, причем остальные факторы суммируются в поправочный коэффициент, значение которого колеблется в пределах от 0,8 до 1,2. Обнаружена первичная зависимость между усадкой, гидрометрическими изменениями и множеством испаренной или принятой воды за определенное время.

Ход усадочного процесса можно хорошо выразить при помощи показательной функции, выведенной на основе реологической модели неоднородного упруго-вязкого вещества, как и при помощи логарифмической функции.

На основании испытаний было определено, что уравниенное значение усадки плотных бетонов на базе легких заполнителей можно получить ускоренным испытанием, длительность которой всего 10 дней.

Влияние размеров тела на усадочные походы по поверхности можно лишь мало приблизительно выразить при помощи постоянной, зависящей только от поверхности испарения, периметра, или от их взаимного отношения.

Замечания и отзывы к этой статье надо послать в трех копиях (не больше 2 страниц) редакции журнала до 31. 10. 1964 г., чтобы можно было опубликовать их в февральском номере 1965 г.

Summary on the page 436.

Inž. ZDENĚK P. BAŽANT, C. Sc.
Stavební ústav ČVUT, Praha

PŘÍBLIŽNÉ METODY ŘEŠENÍ DOTVAROVÁNÍ A SMRŠŤOVÁNÍ
NEHOMOGENNÍCH BETONOVÝCH KONSTRUKCÍ
A UŽITÍ SAMOČINNÝCH POČÍTAČŮ

Obecné řešení vlivu nehomogenního dotvarování a smršťování při spolupůsobení betonu různého stáří a betonu s ocelí nebo s podloží, jež bylo uveřejněno r. 1962 v článku [2], je u vícekrát staticky neurčitých konstrukcí složité a pracné a u většiny okrajových úloh daných v prostoru diferenciálními rovnicemi i nemožné. Proto v této práci, již navážeme na citovaný článek [2], pokusíme se odvodit přibližná konvergující řešení pro složitější úlohy dotvarování, jaké představují např. zavěšené betonové trámové mosty se žukými i parabolickými závěsnými lany (např. most přes záliv Maracaibo ve Venezuele), montované betonové konstrukce rámové, betonové nosníky na pružném podkladě, úlohy o deskách, stěnách, skořepinách ap.

Předpoklady o průběhu dotvarování a základní vztahy jsou uvedeny ve [2], takže zde jen stručně vyjmenujeme hlavní body. Základním předpokladem je Dischingerův zjednodušený průběh lineárního dotvarování a smršťování betonu, daný součinitelem dotvarování $\varphi(t)$ jako funkcí času t . Pro vyjádření nehomogenity konstrukce, spolupůsobící od času t_k , se zavádí dále předpoklad, že křivky $\bar{\varphi}_n(t) = \varphi_n(t) - \varphi_n(t_k)$ pro různé části R konstrukce jsou navzájem afinní podle koeficientu afinity dotvarování κ , tj. $\bar{\varphi}_R(t) = \kappa \bar{\varphi}(t)$, přičemž $\varphi(t)$ značí zvolenou základní křivku dotvarování a $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi(t_k)$. Proměna atmosferických podmínek se vyjadřuje redukcí času.

Řešení časového průběhu staticky neurčitých veličin $X_j(t)$ n -krát staticky neurčitého systému obecně nehomogenního z hlediska dotvarování je dáno systémem lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{dX_j(t)}{d\varphi} + \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j(t) + \delta'_i(t) + \frac{d\delta_i(t)}{d\varphi} + \delta'_{sm_i} = 0 \quad (1)$$

$(i = 1, \dots, n).$

Hodnoty δ_{ij} resp. δ'_{ij} vyjadřují pružnostní konstanty základní statické soustavy dané resp. transformované konstrukce, jež je definována jako konstrukce totožná s danou, avšak se změnými konstantami pružnosti $E' = E/\kappa$, μ' , $G' = \frac{1}{2} E'/(1 + \mu')$. Hodnoty δ_i , resp. δ'_i vyjadřují deformace ve smyslu X_i od vnějšího zatížení a hodnoty δ'_{sm_i} deformace od poměrných smrštění $\kappa \varepsilon_{sm}(\infty) / \varphi(\infty)$. Do členů δ_i se též zahrnuje vliv posuvu podpór a tepelné dilatace. Význam předpokladu afinity křivek dotvarování spočívá v tom, že koeficienty δ'_{ij} a při stálém zatížení též δ'_i jsou konstantní. V opač-

ném případě by byly koeficienty κ a tedy i hodnoty δ'_{ij} , δ'_i časově proměnné. Rovnice (1) by měly sice stejný tvar, ale jejich řešení by bylo pracnější.

Rovnici (1) lze upravit na tzv. kanonický tvar

$$\frac{dX_i(t)}{d\varphi} = \sum_{j=1}^n A_{ij} X_j(t) + B_i(t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1a)$$

kde $[A_{ij}] = -[\delta_{ij}]^{-1} [\delta'_{ij}]$, $[B_i(t)] = -[\delta_{ij}]^{-1} \left[\delta'_i(t) + \frac{d\delta_i(t)}{d\varphi} + \delta'_{sm_i} \right]$. Závorky [] značí čtvercovou matici s indexy i, j nebo sloupcovou matici s indexy i .

1. Integrace rozvojem v mocninou řadu

Uvažujme staticky neurčitou konstrukci a předpokládejme, že funkce $\delta'_i(t)$, $d\delta_i(t)/d\varphi$, dané průběhem vnějšího zatížení a posuvy podpór, lze v jistém intervalu vyjádřit mocninou funkcí $\bar{\varphi}(t)$ (jsou spojité a mají spojité derivace). Řešení přetvárných rovnic (1) lze pak hledat v tomto intervalu ve tvaru mocninné řady [6]

$$X_i(t) = X_{i(t)} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} X_{i(\alpha)} \bar{\varphi}^{\alpha} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

Koeficienty řady lze určit buď dosazením rov. (2) do (1) (metodou neurčitých součinitelů), nebo podle vzorce Taylorova

$$X_{i(\alpha)} = \frac{1}{\alpha!} \frac{d^{\alpha} X_i(t_k)}{d\varphi^{\alpha}}. \quad (3)$$

Derivaci $dX_i/d\varphi$ lze vyjádřit přímo z rov. (1) pomocí hodnot X_i . Vyšší derivace $d^{\alpha} X_i/d\varphi^{\alpha}$ lze vypočítat, derivují-li se $(\alpha - 1)$ krát rovnice (1). Odráží se tak rekurentní vztahy

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_{j(\alpha)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_{j(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{d\varphi^{\alpha-1}} (\delta'_i(t_k) + \delta'_{sm_i}) + \frac{d^{\alpha}}{d\varphi^{\alpha}} \delta_i(t_k) \right] = 0 \quad (4)$$

$(i = 1, \dots, n),$

kde $X_{i(0)} = X_i(t_k)$. Pro $\alpha > 1$ je zde zřejmě $d^{\alpha-1} \delta'_{sm_i} / d\varphi^{\alpha-1} = 0$. Při konstantním zatížení a neposuvnosti podpór anulují se i derivace hodnot δ_i a δ'_i a rovnice se zjednodušují.

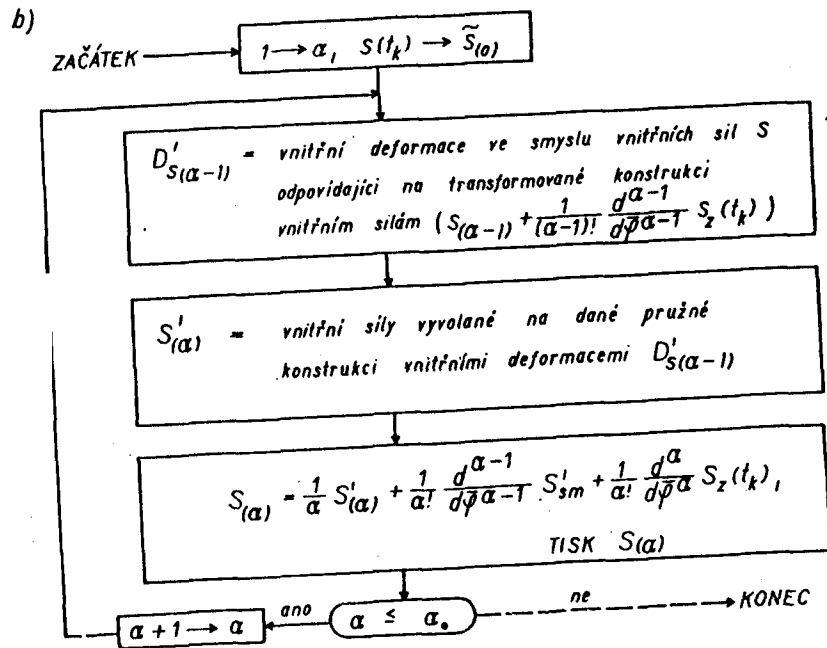
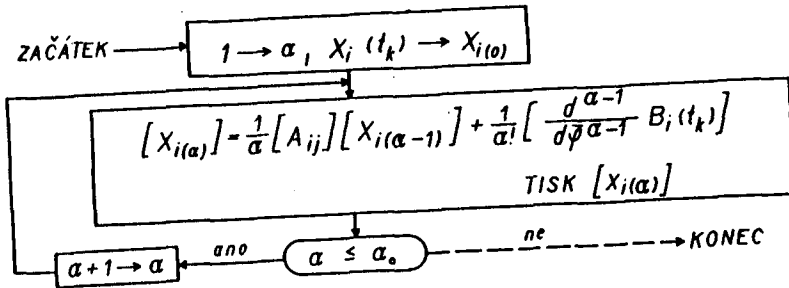
Rovnice (4) tvoří systémy n lineárních rovnic pro neznámé $X_{1(\alpha)}, \dots, X_{n(\alpha)}$, které mají všechny stejnou matici $[\delta_{ij}]$. Je to matice pro řešení dané pružné konstrukce. Podle rovnic (4) můžeme postupně vypočítat koeficienty $X_{j(\alpha)}$ mocninné řady, počínaje od dané počáteční hodnoty $X_j(t_k)$.

Postup řešení je znázorněn v maticové symbolice v tab. 1a. Omezíme-li se v řadě (2) na konečný počet členů až do řádu α_0 , lze řešení považovat za přibližné. Pro zbytek podle Taylorova vzorce platí výraz $[d^{\alpha_0+1} X_i(t_1) / d\varphi^{\alpha_0+1}] \bar{\varphi}^{\alpha_0+1} / (\alpha_0 + 1)!$, kde t_1 značí jistou hodnotu v intervalu (t_k, t) . Mají-li se z daných konečných hodnot $X_i(\infty)$ zpětně určit počáteční hodnoty $X_i(t_k)$ nutné k dosažení těchto konečných hodnot, platí zřejmě tytéž rovnice, v nichž se pouze zamění t_0 za ∞ a $\bar{\varphi} = \varphi(t) - \varphi(t_k)$ za $-(\varphi(\infty) - \varphi(t))$.

Tabulka 1

Blokové schéma pro výpočet koeficientů mocninné řady;
 a) pro staticky neurčitou konstrukci – rovn. (2), b) obecně
 Блокoвая cхема для расчета коэффициентов степенного ряда; а) для статически не-
 определенной конструкции, б) в общем случае
 Bloc diagram for evaluation of coefficients of a power series;
 a) for a statically indeterminate structure, b) general

a) $[A_{ij}]^{-1} = -[\delta_{ij}]^{-1} \cdot [\delta'_{ij}]$, $[B_i(t)] = -[\delta_{ij}]^{-1} \cdot [\delta'_i(t) + \frac{d\delta_i(t)}{d\bar{\varphi}} + \delta'_{sm}]$



2. Integrace postupnými aproximacemi

Jako prvé přiblížení se zvolí hodnoty $X_{i,1} = X_i(t_k)$ a dosadí se za $X_i(t)$ do rovnic (1). Integrovaním těchto rovnic od $t = t_0$ do t obdrží se rovnice, jež pro r -tou aproximaci zní

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} [X_{i(r)} - X_i(t_k)] + \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} \int_{t_k}^t X_{i(r-1)} d\varphi + \int_{t_k}^t \delta'_i d\varphi + \delta_i(t) - \delta_i(t_k) + \delta'_{sm} \bar{\varphi}(t) = 0 \quad (5)$$

(i = 1, ..., n).

Jejich řešením lze určit hodnoty $X_{i(r)}$ z hodnot X_i [6]. Tyto hodnoty s rostoucím r obvykle konvergují k přesnému řešení. (V [6] je udáno poměrně jednoduché omezení chyby.) Vypočtený analytický výraz pro $X_i(t)$ je totožný s rozvojem (2) v mocninou řadu. Postupně aproximace konvergují i když se za $X_{i(1)}$ zvolí libovolný analytický výraz (omezený v daném intervalu), splňující počáteční podmínky.

3. Numerická integrace polygonální (Eulerova–Cauchyho)

Interval $0 \leq \bar{\varphi}(t) \leq \bar{\varphi}(\infty)$, kde $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi(t_k)$, rozdělíme na m_0 dílků $\Delta\varphi^{(m)} = \varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}$. Hodnotám $\Delta\varphi^{(m)}$ odpovídají podle křivky $\varphi(t)$ (spojitá stále rostoucí funkce) časové úseky $\Delta t^{(m)} = t^{(m)} - t^{(m-1)}$, kde $\varphi^{(m)} = \varphi(t^{(m)})$. Při rovnoměrném dělení na dílky $\Delta\varphi = \bar{\varphi}(\infty) / m_0$ nejsou zřejmě odpovídající časové úseky $\Delta t^{(m)}$ stejné. Hodnoty $X_i(t)$, resp. $M(t)$, ... na konci m -tého dílku označme $X_i^{(m)}$, resp. $M^{(m)}$, ... kde $X_i^{(m)} = X_i(t^{(m)})$. Podobně označme i hodnoty $\delta_i^{(m)}$, $\delta'_i{}^{(m)}$ odpovídající vnějšímu zatížení a celkovému posuvu podpor v čase $t^{(m)}$. Změnám vnějšího zatížení a posuvům podpor v časovém úseku $t^{(m-1)} < t < t^{(m)}$ odpovídají změny $\Delta\delta_i^{(m)}$. Průběh zatížení, a posuvů podpor i jejich derivací může být nespojitý, avšak je vhodné volit dělení tak, aby nespojitosti byly pouze v dělicích bodech $t^{(m)}$.

Pišme mocninnou řadu (2) pro m -tý dílek s počáteční hodnotou $X_i^{(m-1)}$. Volíme-li $\Delta\varphi$ dostatečně malé, lze se v mocninné řadě omezit přibližně jen na první člen. Nahradíme-li v rov. (2) $\bar{\varphi}$ za $\Delta\varphi$, $X_i(t)$ za $X_i^{(m)}$, $X_i(t_k)$ za $X_i^{(m-1)}$ a označíme-li $X_{i(1)}\Delta\varphi = \Delta X_i^{(m)}$, obdržíme pro m -tý dílek diferenční vztah $X_i^{(m)} = X_i^{(m-1)} + \Delta X_i^{(m)}$. Zanedbáním členů řádu druhého a vyšších vzniká zde chyba, jejíž velikost podle vzorce Taylorova je $\frac{1}{2} \Delta\varphi^2 [d^2 X_i(t_i^{(m)}) / d\varphi^2]$, kde $t_i^{(m)}$ je jistá hodnota v intervalu $(t^{(m-1)}, t^{(m)})$. Z rov. (4) pro $\alpha = 1$ vyplývají po znásobení $\Delta\varphi$ a příslušných dosazeních diferenční rovnice pro m -tý dílek [6]

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \Delta X_j^{(m)} + \Delta\varphi \left(\sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j^{(m-1)} + \delta'_i{}^{(m-1)} + \delta'_{sm} \right) + \Delta\delta_i^{(m)} = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (6)$$

tvořící systém n lineárních rovnic pro neznámé $\Delta X_j^{(m)}$ s maticí $[\delta_{ij}]$ dané pružné konstrukce. Při výpočtu se vyjde od daných počátečních hodnot $X_i^{(0)} = X_i(t_0)$ a opakovaním řešení rov. (6) a přičítáním změn $\Delta X_i^{(m)}$ se postupně získají hodnoty $X_i^{(m)}$ a $X_i^{(m, \infty)} = X_i(\infty)$.

Tento postup můžeme označit za numerickou integraci vpřed. Její blokové schéma je znázorněno v maticové symbolice na tab. 2a. Potřebujeme-li vypočíst naopak zpětné výchozí hodnoty potřebné k dosažení daného konečného stavu, postupujeme tzv. numerickou integrací vzad, vycházející z konečné místo z počáteční hodnoty v daném dílku. Její blokové schéma se získá záměnou operací $1 \rightarrow m$, $X_i^{(0)} \rightarrow X_i^{(m)}$,

Tabulka 2

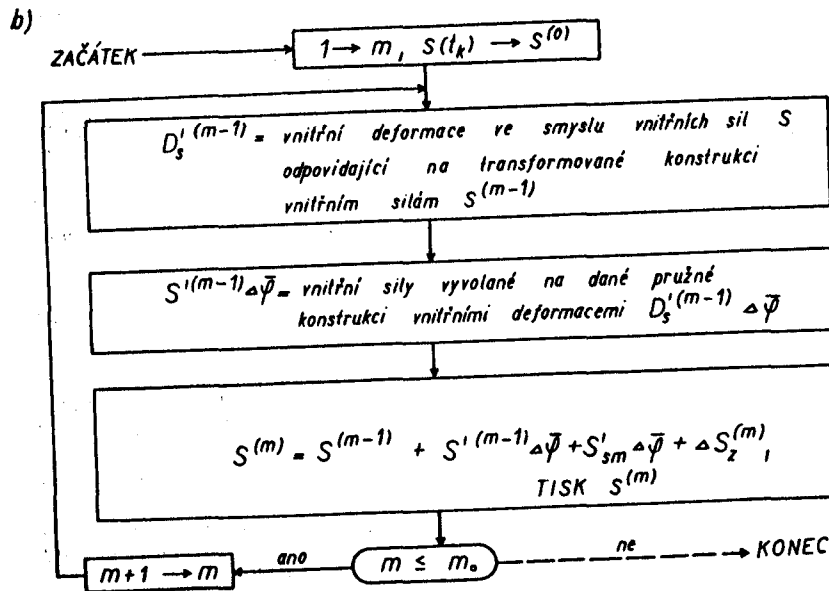
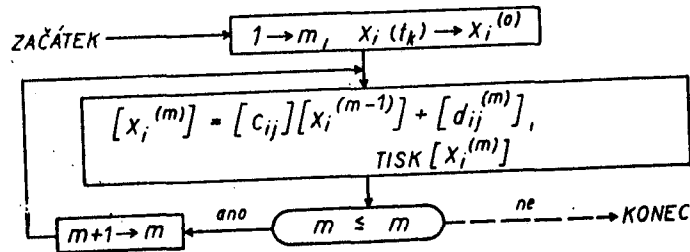
Blokové schéma pro numerickou integraci vpřed (polygonální);
a) pro staticky neurčitou konstrukci, b) obecně

Блокковая схема для численной интеграции вперед (полигональной); а) для статически неопределимой конструкции, б) в общем случае

Block diagram for numerical integration ahead (polygonal);
a) for a statically indeterminate structure, b) general

$$a) \quad [c_{ij}] = [1] - \Delta \bar{\varphi} [\delta_{ij}]^{-1} \cdot [\delta'_{ij}],$$

$$[d_{ij}^{(m)}] = -[\delta_{ij}]^{-1} [\Delta \bar{\varphi} (\delta_i^{(m-1)} + \delta'_{sm_i}) + \Delta \delta_i^{(m)}]$$



$m < m_0$ za $m_0 \rightarrow m$, $X_i(\infty) \rightarrow X_i^{(m)}$, $m > 0$ a veličin $X_i^{(m-1)}$, $\delta_i^{(m-1)}$ za $X_i^{(m)}$, $\delta_i^{(m)}$. Diferenční rovnice pro integraci zpět mají tvar $X_i^{(m-1)} = X_i^{(m)} - \Delta X_i^{(m)}$, kde

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \Delta X_j^{(m)} + \Delta \varphi \left(\sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j^{(m)} + \delta_i^{(m)} + \delta'_{sm_i} \right) + \Delta \delta_i^{(m)} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6a)$$

Při výpočtu se vyjde z požadovaných konečných hodnot $X_i(\infty)$.

4. Numerická integrace Rungeho—Kuttova

Tato numerická integrace dává řešení se značně menší chybou než předcházející metody, neboť vypočtené přibližné řešení má s přesným řešením v počátku styk čtvrtého řádu [6], [4]. Řešení je dáno vzorcem

$$X_i^{(m)} = X_i^{(m-1)} + \frac{1}{6} \Delta \varphi (1k_i^{(m)} + 2^2k_i^{(m)} + 2^3k_i^{(m)} + 4k_i^{(m)}) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7)$$

kde hodnoty $1k_i^{(m)}, \dots$ se postupně určí řešením rovnic

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} 1k_j^{(m)} + \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j^{(m-1)} + \delta_i^{(m-1)} + \frac{d}{d\varphi} \delta_i^{(m-1)} + \delta'_{sm_i} = 0, \quad (8a)$$

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} 2k_j^{(m)} + \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} \left(X_j^{(m-1)} + \frac{1}{2} \Delta \varphi 1k_j^{(m)} \right) + \delta_i^{(m-\frac{1}{2})} + \frac{d}{d\varphi} \delta_i^{(m-\frac{1}{2})} + \delta'_{sm_i} = 0, \quad (8b)$$

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} 3k_j^{(m)} + \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} \left(X_j^{(m-1)} + \frac{1}{2} \Delta \varphi 2k_j^{(m)} \right) + \delta_i^{(m-\frac{1}{2})} + \frac{d}{d\varphi} \delta_i^{(m-\frac{1}{2})} + \delta'_{sm_i} = 0, \quad (8c)$$

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} 4k_j^{(m)} + \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} \left(X_j^{(m-1)} + \Delta \varphi 3k_j^{(m)} \right) + \delta_i^{(m)} + \frac{d}{d\varphi} \delta_i^{(m)} + \delta'_{sm_i} = 0 \quad (8d)$$

($i = 1, \dots, n$).

Blokové schéma řešení je znázorněno v tab. 5.3. Index $m - \frac{1}{2}$ značí hodnotu odpovídající hodnotě $\varphi^{(m)} - \frac{1}{2} \Delta \varphi^{(m)}$. Postup integrace zpět dostáváme odtud např. záměnou $\Delta \varphi$ za $-\Delta \varphi$, a obráceným číslováním dílků. (Poznámka: Numerická integrace polygonální i Rungeho—Kuttova by platila beze změny i kdyby neplatila afinita dotvarování a x bylo proměnné. Řešení by však bylo zkomplikováno tím, že pro každý dílek by bylo třeba určit jinou hodnotu $\delta'_{ij}, \delta_i, \delta'_{sm_i}$.)

5. Zobecnění přibližných řešení

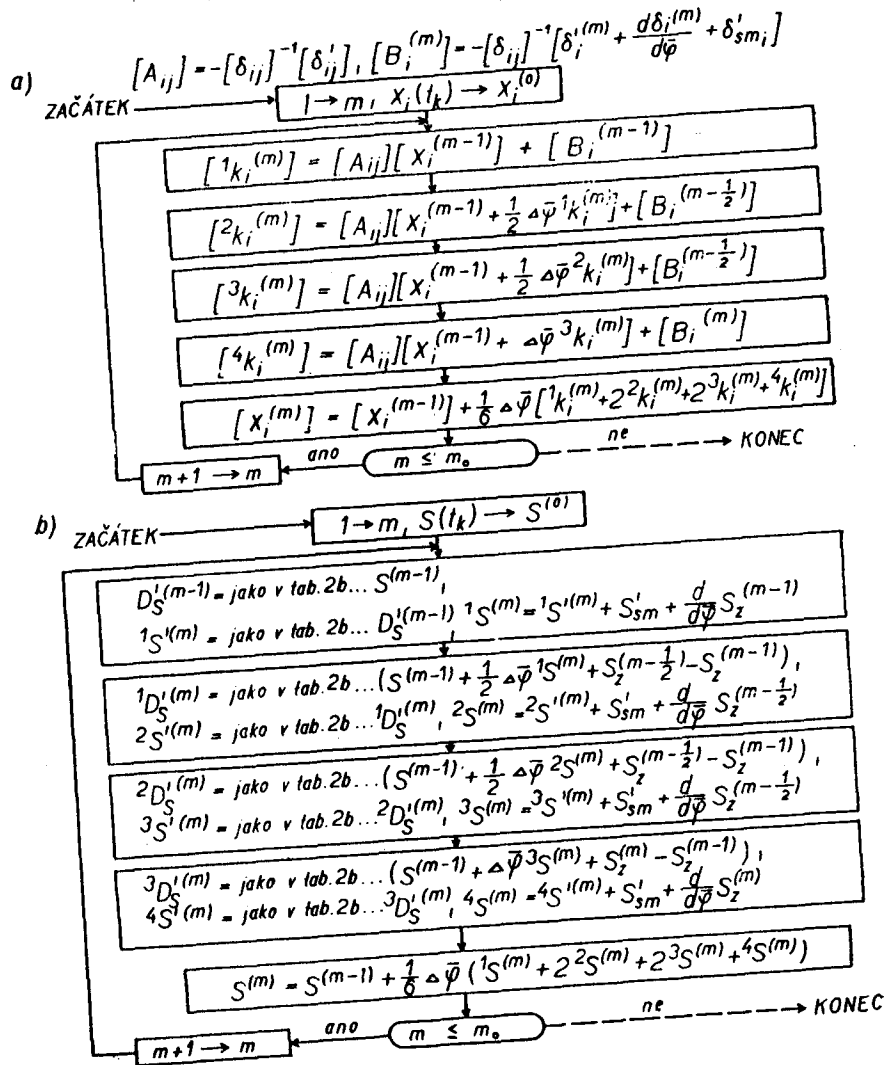
Přibližná řešení dotvarování lze zobecnit pro okrajové úlohy dané diferenciálními rovnicemi v prostorových souřadnicích (např. desky, stěny, skořepiny, nosník na pružném podkladě, obecná tělesa ap.). Kdybychom totiž řešili okrajovou úlohu v prostoro-

Tabulka 3

Blokové schéma pro numerickou integraci Runge-Kutta (vpřed);
 a) pro staticky neurčitou konstrukci, b) obecně

Блокочная схема для численной интеграции Рунге-Кутты (вперед); а) для статически неопределимой конструкции, б) в общем случае

Block diagram for numerical integration of Runge-Kutte (ahead);
 a) for a statically indeterminate structure, b) general



vých souřadnicích některou přibližnou metodou, např. metodou sítí, obdrželi bychom systém rovnic tvaru (1). Pro počet rovnic $n \rightarrow \infty$ konverguje toto řešení k přesnému řešení v prostorových souřadnicích. Jestliže předpokládáme, že taková formulace řešení této soustavy lineárních rovnic, která nezávisí na počtu rovnic n , platí nezměněně i pro $n \rightarrow \infty$, plyne odtud možnost zobecnění na okrajové úlohy. Jde přitom pouze o to, nalézt takové vyjádření přibližných řešení dotvarování, které by nezáviselo na volbě staticky neurčitých a jejich počtu.

Označme obecně $S_z(t)$, resp. $\Delta S_z^{(m)}$ vnitřní síly (např. napětí, ohybový moment, normální sílu ap.) vyvolané na dané pružné konstrukci vnějším zatížením, celkovým posuvem podpor a teplotou v čase t , resp. přírůstkem zatížení, posuvem podpor a změnou teplot v časovém intervalu $\Delta t^{(m)} = t^{(m)} - t^{(m-1)}$; S'_{sm} vnitřní síly vyvolané na dané pružné konstrukci poměrnými smrštěními $\propto \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Potom platí, že přibližné řešení vnitřních sil $S(t)$ v obecné úloze rozvojem v mocninou řadu je dáno

schématem podle tab. 1b, kde $S(t) = S(t_i) + \sum_{a=1}^{\infty} S_{(a)}\varphi^a$, přibližné řešení numerickou

integrací polygonální schématem podle obr. 2b, numerickou integrací Runge-Kutta schématem podle obr. 3b. O správnosti obecné formulace pro staticky neurčitou konstrukci lze se přesvědčit, dosadí-li se za $S(t)$ vnitřní síly $M(t)$, $N(t)$, ... konstrukce ($M = \mathfrak{M} + \sum M_i X_i$), jimž na transformované konstrukci odpovídají vnitřní deformace

$M(t)/E'I$, $N(t)/E'F$, ..., a vyjádří-li se řešení dané pružné konstrukce podle převrácených výminek staticky neurčité konstrukce (silová metoda). Dostanou se tak rovnice v tab. 1a, 2a, 3a.

6. Převod vnitřní deformace na zatížení

Podle předešlého odstavce při řešení dotvarování libovolnou přibližnou metodou jde v podstatě o problém určený vnitřními silami S' , resp. S'_{sm} , vyvolaných na dané pružné konstrukci vnitřními deformacemi D'_S , resp. $\propto \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, kde D'_S značí deformaci ve smyslu vnitřních sil, odpovídající na transformované konstrukci vnitřním silám S podle Hookeova zákona pro transformované těleso (E' , μ' , G'). Je to problém teorie pružnosti.

Obecný postup je tento: Deformace D'_S a poměrná smrštění $\propto \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ se zruší na dané pružné konstrukci (konstanty E , μ , G) vnitřními silami \bar{S} plynoucími z Hookeova zákona. Dále se určí zatížení \bar{Z} , jaké odpovídá vnitřním silám \bar{S} podle diferenciálních podmínek rovnováhy a podle podmínek rovnováhy na povrchu tělesa (na koncích prutů, na okrajích desky ap.) a případné rovnováhy v plochách nespojitého průběhu funkce x (body nespojitosti x u prutu, čáry nespojitosti u desky ap.). Nakonec se řešením dané pružné konstrukce (konstanty E , μ , G) vypočtou vnitřní síly \bar{S} vyvolané na dané pružné konstrukci zatížením $-\bar{Z}$. Účinek deformace D'_S a smrštění $\propto \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ na dané pružné konstrukci je pak dán vnitřními silami $S' + S'_{sm} = \bar{S} + \bar{S}$.

Snadné je to u konstrukce z prutů homogenního průřezu, kde platí $\bar{M} = -\alpha M$, $\bar{N} = -\alpha \tilde{N} - EF\alpha\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, $\bar{T} = dM/dx$. Zde značí x délku prutu, \bar{M} , \tilde{N} , \bar{T} ohybový moment, sílu normální a posouvající, F plochu průřezu. Podle rovnic rovnováhy vnitřními silám M , N přísluší spojité zatížení $\bar{q} = d^2(\alpha M)/dx^2$ napříč prutu a $\bar{n} = d\tilde{N}/dx$ podél prutu. Přitom na koncích prutů resp. v místech náhlé změny x

je třeba připojit odpovídající \bar{M} , \bar{N} , \bar{T} , resp. jejich změny jako zatížení. Uvažujeme-li též kroutící momenty K , platí $\bar{K} = \kappa K (1 + \mu) / (1 + \mu')$ a odpovídající zatížení příčným momentem je $\bar{m} = d\bar{K}/dx$.

Výhodou tohoto postupu je, že k řešení účinku zatížení \bar{Z} je možno užít příčinkových čar, ploch ap., které jsou obvykle k dispozici již předem. Při praktickém výpočtu užijeme nejlépe dělení prutů na dílky a spojitě zatížení nahradíme osamělými břemeny. Abychom postup lépe znázornili, ukažme jej nejobecněji pro složenou prostorovou napjatost tělesa. V kartézských souřadnicích x, y, z je podle přetvárných rovnic (3.4a) transformovaného tělesa (isotropního)

$$E\bar{\epsilon}'_x = \kappa \left(\sigma_x - \mu'\sigma_y - \mu'\sigma_z + E \frac{\epsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \right), \quad (9)$$

$$E\bar{\gamma}'_{xy} = 2\kappa(1 + \mu')\tau_{xy}, \dots$$

Z přetvárných rovnic daného pružného tělesa pak lze pomocí $\bar{\epsilon}'_x, \bar{\gamma}'_{xy}, \dots$, vyjádřit hodnoty

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{(1 - \mu)E\bar{\epsilon}'_x + \mu(E\bar{\epsilon}'_y + E\bar{\epsilon}'_z)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}, \quad \bar{\tau}_{xy} = -\frac{E\bar{\gamma}'_{xy}}{2(1 + \mu)}, \dots, \quad (10)$$

jež podle (5.11) nezávisí na E . Tomu odpovídá zatížení daného pružného tělesa objemovými silami $\bar{V}_x, \bar{V}_y, \bar{V}_z$ a povrchovým zatížením \bar{p}_x, \dots

$$\bar{V}_x = -\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial z}, \dots \quad (11)$$

$$\bar{p}_x = n_x \bar{\sigma}_x + n_y \bar{\tau}_{yx} + n_z \bar{\tau}_{xz}, \dots \quad (12)$$

kde n_x, n_y, n_z jsou směrové roviny normály povrchu. V případě nespojitosti funkce $\kappa = \kappa(x, y, z)$ na nějaké ploše je nutno v této ploše dále zavést poměrné povrchové zatížení $\bar{S}_x = n_x(\bar{\sigma}_{x1} - \bar{\sigma}_{x2}) + n_y(\bar{\tau}_{yx1} - \bar{\tau}_{yx2}) + n_z(\bar{\tau}_{xz1} - \bar{\tau}_{xz2}), \dots$, kde $\bar{\sigma}_{x1}$ resp. $\bar{\sigma}_{x2}$ odpovídá koeficientu κ_1 resp. κ_2 a μ_1 resp. μ_2 na jedné straně plochy nespojitosti (ve smyslu normály), resp. na druhé její straně. Speciálně pro $\mu' = \mu$ platí

$$\bar{V}_x = \frac{\partial}{\partial x} \kappa \left(\sigma_x + \frac{E}{1 - 2\mu} \frac{\epsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\kappa \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (\kappa \tau_{xz}), \dots \quad (13)$$

$$\bar{p}_x = -\kappa p_x - n_x \frac{E}{1 - 2\mu} \kappa \frac{\epsilon_{sm}(\infty)}{\varphi(\infty)}, \dots \quad (14)$$

Při rovinné složené napjatosti je postup obdobný.

Analogický postup platí pro technické řešení desek a skořepin aj. Tak např. pro izotropní desku nehomogenní v plošných souřadnicích x, y, z hlediska dotvarování, avšak homogenní po tloušťce desky z , platí

$$\bar{w}'_{xx} = \frac{-M_x + \mu' M_y}{(1 + \mu') D'}, \quad \bar{w}'_{yy} = \frac{-M_y + \mu' M_x}{(1 - \mu'^2) D'}, \quad \bar{w}'_{xy} = \frac{-M_{xy}}{(1 - \mu') D'}, \quad (15)$$

$$\bar{M}_x = D(\bar{w}'_{xx} + \mu \bar{w}'_{yy}), \quad \bar{M}_y = D(\bar{w}'_{yy} + \mu \bar{w}'_{xx}), \quad \bar{M}_{xy} = D(1 + \mu) \bar{w}'_{xy}, \quad (16)$$

takže vnitřní deformaci odpovídá zatížení \bar{p} povrchu desky

$$\bar{p} = \frac{\partial^2 \bar{M}_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{M}_y}{\partial y^2} \quad (17)$$

a zatížení okrajů momenty $\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_x$ a posouvajícími silami \bar{T}_x, \bar{T}_y , případně též jejich změnami na čarách nespojitosti $\kappa = \kappa(x, y)$. (U vetknutých okrajů se zatížení $\bar{M}_x, \dots, \bar{T}_x, \dots$ přímo ruší s vetknutím, u kloubových okrajů se ruší pouze \bar{T}_x, \bar{T}_y .) Označení zde je: $w = w(x, y)$ průhybová plocha, $w_{,xx}, \dots$ její derivace, $\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_{xy}, \bar{T}_x, \bar{T}_y$ momenty (zahnující u předpjaté desky přibližně i momenty od předpětí) a posouvající síly E, E', μ, μ' pružnostní konstanty dané, resp. transformované a $D = \frac{1}{12} E d^3 / (1 - \mu^2), D' = \frac{1}{12} E' d^3 / (1 - \mu'^2)$ válcové tuhosti. Pro $\mu' = \mu$ platí

$$\bar{M}_x = -\kappa M_x, \quad \bar{M}_y = -\kappa M_y, \quad \bar{M}_{xy} = -\kappa M_{xy}, \quad \bar{T}_x = -\kappa T_x, \quad \bar{T}_y = -\kappa T_y.$$

Nakonec ukažme ještě postup u nosníku na pružném podkladě. V teorii pružnosti platí přetvárné rovnice $d^2 w / dx^2 = -M / EJ, p = kw$, kde $w(x, t)$ je průhybová čára, M ohybový moment včetně vlivu předpětí nosníku, $p(x, t)$ reakce podkladu a k konstanta vyjadřující pružnost podkladu. Rovnice rovnováhy zní $d^2 M / dx^2 = q - p$, kde $q(x, t)$ je zatížení nosníku. Uvažujeme-li dotvarování v nosníku i v podkladu (koeficienty afinity κ , resp. κ_p), platí podle rovnic rovnováhy

$$\bar{q} = -\kappa_p p + \kappa \frac{d^2 M}{dx^2} = +\kappa_p q - (\kappa_p - \kappa) \frac{d^2 M}{dx^2}. \quad (18)$$

Účinek zatížení \bar{q} spolu se zatížením $-\kappa M$ a $-\kappa T$ na koncích nosníku a $(\kappa_2 - \kappa_1)M, (\kappa_2 - \kappa_1)T$ v bodech nespojitosti $\kappa = \kappa(x)$ lze vyčíslit z tabulek příčinkových čar pro pružný nosník. Pro štěrkové nebo pískové podloží lze dosadit $\kappa = 0$.

U rámové konstrukce je výhodné užít k řešení účinku vnitřní deformace $D'_s + D'_{sm}$ metody deformační nebo metod rozvodu deformace a rozdělování momentů (Crossova). Potom lze přímo určit zatížení styčnicků, nahrazující účinek této deformace. Snadno lze ukázat, že pro $\kappa_{ik} = \text{const.}$ po délce prutu ik lze účinek deformace D'_s nahradit zatížením styčnicků momenty $-\bar{M}_{ik} = \kappa_{ik} M_{ik}$ a posouvajícími silami $-\bar{T}_{ik} = \kappa_{ik} T_{ik}$. Účinek deformace D'_{sm} se při řešení deformační metodou určí přímo z pootočení $\psi'_{sm_{ik}}$ spojnic konců prutů, odpovídajících smrštění $\kappa \epsilon_{sm}(\infty) / \varphi(\infty)$; při řešení Crossovou metodou je třeba určit též odpovídající zatížení styčnicků $-\bar{M}_{sm_{ik}}, -\bar{T}_{sm_{ik}} = -(\bar{M}_{sm_{ik}} + \bar{M}'_{sm_{ik}}) / l, \dots$ (U oboustranně vetknutého prutu je $\bar{M}_{sm_{ik}} = -\psi'_{sm_{ik}} GEI / l$).

7. Přibližné řešení ideálními přetvárnými moduly

Toto řešení, které se u řešení průřezů v praxi často užívá, vyplývá z přetvárných rovnic pro součtové deformace pružné i dlouhodobé, psaných za přibližného předpokladu, že vnitřní síly jsou v průběhu času konstantní. Pro jednoduchost uvažujme pouze neměnné zatížení. U staticky neurčité konstrukce obdržíme přetvárné rovnice

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} + \delta'_{ij} \bar{\varphi}(t)) X_j(t) + \delta_i(t_k) + (\delta'_i + \delta'_{sm}) \bar{\varphi}(t) = 0, \quad (19)$$

při čemž pro počáteční stav platí $\sum_i \delta_{ij} X_j(t_k) + \delta_i(t_k) = 0$. Dosadíme-li odtud za $\delta_i(t_k)$, obdržíme systém lineárních rovnic

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} + \delta'_{ij} \bar{\varphi}(t)) (X_j(t) - X_j(t_k)) + \bar{\varphi}(t) \left(\sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j(t_k) + \delta'_i + \delta'_{sm} \right) = 0 \quad (20)$$

(i = 1, ..., n),

z nichž lze vypočíst změny $X_j(t) - X_j(t_k)$.

Tento postup řešení lze snadno též zobecnit na tělesa a libovolný pružný systém. Z rov. (20) vidíme, že změna vnitřních sil $S(t) - S(t_k)$ od času t_k do t je přibližně dána jako vnitřní síly vyvolané na konstrukci s moduly pružnosti $E_{id}(t) = E/(1 + \kappa\bar{\varphi}(t))$ vnitřními deformacemi $D'_{\kappa}\bar{\varphi}(t)$ a smrštěním $\kappa(\varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty))\bar{\varphi}(t)$, kde $D'_{\kappa}\bar{\varphi}(t)$ jsou vnitřní deformace ve smyslu sil S odpovídající počátečním vnitřním silám $S(t_k)$ na transformované konstrukci (s konstantami E', μ'). Moduly $E_{id}(t)$ nazveme jako ideální přetvárné moduly a odpovídající konstrukci jako ideální konstrukci.

Nemění-li se v čase t_k statické působení, ani nevzniká posuv podpor a smršťování se neuplatňuje, obdrží se řešení $X_j(t)$ prostě řešením ideální konstrukce pro dané zatížení a smrštění. Tato výhodná vlastnost je patrna z výchozí rovnice, neboť $\delta_i(t_k)$ a δ'_i odpovídají téměř zatížení, takže rovnici lze zapsat ve tvaru $\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \delta_i^d + \delta_{sm}(t) = 0$.

Při složené napjatosti je třeba zavést ještě další ideální pružnostní konstanty $\mu_{id}, G_{id} = \frac{1}{2} E_{id}/(1 + \mu_{id})$, které odvodit porovnáním ze součtových přetvárných rovnic tělesa pro deformace pružné i dlouhodobé s přetvárnými rovnicemi ideálního tělesa. Obdrží se $\mu_{id}(t) = (\mu + \mu' \kappa \bar{\varphi}(t))/(1 + \kappa \bar{\varphi}(t))$.

Lze se přesvědčit, že řešení ideálními přetvárnými moduly vyhovuje limitním případům řešení přesného. Poněvadž pro teoretický případ $\bar{\varphi} \rightarrow \infty$ je $\lim E_{id}(t) \bar{\varphi}(t) = E/\kappa = E'$, $\lim \mu_{id}(t) = \mu'$, je splněna podmínka, že pro $\bar{\varphi} \rightarrow \infty$ musí se obdržet partikulární řešení na transformované konstrukci.

Psaním rov. (5.31) pro malý dílek $\Delta\varphi$ místo $\bar{\varphi}(t)$ a zavedením členu od změny zatížení na konci dílku se obdrží systém

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} + \delta'_{ij} \Delta\varphi) \Delta X_j^{(m)} + \Delta\varphi \left(\sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j^{(m-1)} + \delta_i^{(m-1)} + \delta'_{sm} \right) + \Delta\delta_i^{(m)} = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

určující $\Delta X_j^{(m)}$ z počáteční hodnoty $X_j^{(m-1)}$ v příslušném dílku. Podle těchto rovnic lze provádět numerickou integraci vpřed.

Dosadíme-li do (20) $X_j^{(m-1)} = X_j^{(m)} - \Delta X_j^{(m)}$, zjistíme, že při stálém zatížení je rov. (20) totožná s rov. (6a) pro polygonální numerickou integraci zpět a tedy i vypočtené hodnoty $\Delta X_j^{(m)}$ jsou pro oba postupy stejné a co do přesnosti rovnocenné. Proto můžeme tento postup nazvat obrácenou numerickou integrací zpět. Těž tento postup lze obrátit pro integraci zpět.

8. Numerická integrace interpolační

Integrujeme-li rov. (1) od $t = t^{(m-1)}$ do $t = t^{(m)}$ a nahradíme-li přibližně průběh X_j a δ'_i lineárním interpolačním výrazem $X_j(t) = X_j^{(m-1)} + \Delta X_j^{(m)}(\varphi(t) - \varphi^{(m-1)})/\Delta\varphi$ ap., obdržíme rovnice

$$\sum_{j=1}^n \left(\delta_{ij} + \frac{1}{2} \delta'_{ij} \Delta\varphi \right) \Delta X_j^{(m)} + \Delta\varphi \left(\sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j^{(m-1)} + \delta_i^{(m-1)} + \delta'_{sm} \right) + \Delta\delta_i^{(m)} + \frac{1}{2} \Delta\delta_i^{(m)} \Delta\varphi = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (21)$$

podle nichž lze provádět postup numerické integrace vpřed. Obdobně lze obdržet rovnice

$$\sum_{j=1}^n \left(\delta_{ij} - \frac{1}{2} \delta'_{ij} \Delta\varphi \right) \Delta X_j^{(m)} - \Delta\varphi \left(\sum_{j=1}^n \delta'_{ij} X_j^{(m)} + \delta_i^{(m)} + \delta'_{sm} \right) + \Delta\delta_i^{(m)} - \frac{1}{2} \Delta\delta_i^{(m)} \Delta\varphi = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (21a)$$

podle nichž lze postupovat zpět.

Toto řešení nazveme numerickou integrací interpolační. Vidíme, že představuje střední cestu mezi rov. (6) a (20), tj. mezi polygonální integrací vpřed a zpět. (Z matematického hlediska je toto řešení speciálním případem obecnější Adamsovy interpolační metody [6].)

Výrazy $\delta_{ij} + \frac{1}{2} \delta'_{ij} \Delta\varphi$, $\delta_i + \frac{1}{2} \delta'_i \Delta\varphi$ představují deformace na konstrukci, jež

místo modulů E má moduly $E = \bar{E} / \left(1 + \frac{1}{2} \kappa \Delta\varphi \right)$. Z tohoto zjištění přímo plyne, že řešení lze provádět podle tab. 2a, zamění-li se δ_{ij} a δ_i za uvedené výrazy. Řešení lze dále zobecnit i na tělesa. Platí zde postup podle tab. 2b, jestliže se všude místo dané pružné konstrukce s konstantami E, μ, G uvažuje konstrukce s moduly $\bar{E} = E / \left(1 + \frac{1}{2} \kappa \Delta\varphi \right)$ a s konstantami $\bar{\mu} = \left(\mu + \frac{1}{2} \mu' \kappa \Delta\varphi \right) / \left(1 + \frac{1}{2} \kappa \Delta\varphi \right)$, $\bar{G} = \frac{1}{2} \bar{E} / (1 + \bar{\mu})$.

Je-li zatížení proměnné, musí jeho proměna být v dílcích plynulá (nejlépe lineárně ve φ). Náhlé změny zatížení na hranici dílku je třeba počítat na dané pružné konstrukci (s moduly E, μ).

V případě, kdy nejde o změnu statického působení ani posuv podpor, tj. veškeré zatížení bylo zavedeno až na definitivní soustavě, nelze — na rozdíl od řešení ideálními moduly — řešení obdržet prostě zatížením konstrukce s moduly $\bar{E}, \bar{\mu}, \bar{G}$.

Při nahrazení dané pružné konstrukce za konstrukci s moduly $\bar{E}, \bar{\mu}, \bar{G}$ platí pro řešení i odstavce 5,6.

9. Relaxační numerická integrace

Polygonální numerická integrace odpovídá přetvárným podmínkám psaným pro deformace za předpokladu konstantního stavu vnitřních sil po dobu Δt . Jiný postup lze odvodit z hodnot relaxace vnitřních sil, předpokládá-li se po krátkou dobu $\Delta t^{(m)}$ konstantní stav deformace. Změny vnitřních sil vzniklé relaxací za předpokladu konstantního stavu deformace označme $\Delta S^{(m)}$. Po uplynutí doby $\Delta t^{(m)}$ se uvolní stav deformace, čímž v konstrukci vzniknou změny vnitřních sil $\Delta S^{(m)}$, jež přibližně (v limitě pro $\Delta t \rightarrow 0$) vyjadřují účinek dotvarování a smršťování. Označíme-li $+\Delta \bar{Z}^{(m)}$ zatížení, jež podle diferenciálních a okrajových podmínek rovnováhy tělesa odpovídá vnitřním silám $+\Delta \bar{S}^{(m)}$, a $\Delta \bar{S}^{(m)}$ vnitřní síly, jež jsou na dané pružné konstrukci vyvolány zatížením $-Z^{(m)}$, je účinek dotvarování a smršťování za dobu $\Delta t^{(m)}$ dán změnami vnitřních sil $\Delta S^{(m)} = \Delta \bar{S}^{(m)} + \Delta S^{(m)}$.

U tohoto řešení budeme pro jednoduchost uvažovat pouze případ $\mu' \doteq \mu$. Snadno lze ukázat, že síly $\Delta S^{(m)}$ se rovnají $(1 - e^{-x\Delta\varphi})$ — násobku vnitřních sil $S^{(m-1)}$ plus vnitřních sil, jež by vznikly od smrštění $\kappa \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ podle teorie pružnosti. Označíme-li $E'' = E/\kappa''$ nové moduly pružnosti, kde $\kappa'' = (1 - e^{-x\Delta\varphi})/(1 - e^{-\Delta\varphi})$ a D_S'' vnitřní deformaci ve smyslu vnitřních sil S odpovídající při modulech E'' vnitřním silám S a poměrným smrštěním $\kappa'' \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$, zjistíme, že $\Delta S^{(m)}$ jsou vnitřní síly, jež na dané pružné konstrukci, tj. při modulech E , ruší vnitřní deformace $D_S''(1 - e^{-\Delta\varphi})$.

Tím dostáváme postup podobný předcházejícím numerickým integracím, jež můžeme nazvat integrací relaxační. Platí pro ni schéma postupu numerické integrace polygonální (tab. 2a, b), jestliže místo transformované konstrukce s moduly E'' uvažujeme konstrukci s moduly $E'' = E/\kappa''(\mu' \doteq \mu)$ a místo $\Delta\varphi$ uvažujeme $1 - e^{-\Delta\varphi}$. Pro určení $\Delta Z^{(m)}$ platí i zde odstavec 6, přičemž však κ je nutno zaměňovat za κ'' . U konstrukce z prutů lze účinek zatížení $\Delta Z^{(m)}$ určit též výhodně příčinkovými čarami.

Přímé řešení staticky neurčité konstrukce je dáno systémem diferencních rovnic tvaru (6), kde místo δ'_{ij} , δ'_i a δ'_{sm} , $\Delta\varphi$ je třeba dosadit hodnoty δ''_{ij} , δ''_i pro konstrukci s moduly $E'' = E/\kappa''$ a hodnoty δ''_{sm} , $\Delta\varphi$ pro smrštění $(1 - e^{-x\Delta\varphi}) \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$. Výhodou řešení je, že matice systému je $\{\delta_{ij}\}$, tj. matice dané pružné konstrukce. Deformace δ_{ij} , δ_i lze stanovit přímo z momentových ploch redukovaných násobitelem $1 - e^{-x\Delta\varphi}$ a ze smrštění $(1 - e^{-x\Delta\varphi}) \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$.

Obdobně by bylo možno odvodit i postup relaxační numerické integrace zpět. Byl by shodný s předcházejícím řešením, s tím jediným rozdílem, že místo $S^{(m-1)}$ se uvažuje $S^{(m)}$ a místo $1 - e^{-x\Delta\varphi}$ a $1 - e^{-\Delta\varphi}$ se uvažuje $e^{-x\Delta\varphi} - 1$ a $e^{-\Delta\varphi} - 1$. V limitě pro $\Delta\varphi \rightarrow 0$ jsou všechny metody za předpokladu konvergence totožné s integrací polygonální. V souhlase s tím pro $\Delta\varphi \rightarrow 0$ je zde $\lim (1 - e^{-x\Delta\varphi})/\Delta\varphi = 1$ a $\lim \kappa'' = \kappa$. Vyjádří-li se funkce $e^{-x\Delta\varphi}$ mocninou řadou a ponechají-li se pouze první dva členy, dostáváme postup numerické integrace polygonální.

Ponevadž pro $\kappa = \text{const.}$ udává funkce $1 - e^{-x\Delta\varphi}$ proměnu vnitřních sil homogenní konstrukce, dává relaxační numerická integrace přesné řešení vnitřních sil pro homogenní konstrukci, tj. pro $\kappa = \text{const.}$ (stačí zde tedy volit jen jeden dílek $\Delta\varphi = \overline{\varphi}(\infty)$). Naproti tomu polygonální numerická integrace dává v tomto případě jen přibližné řešení. Poskytuje však naopak přesné řešení deformace u staticky určité konstrukce, kdežto relaxační integrace nikoliv. Z toho vyplývá, že této metody je vhodné užit u málo nehomogenních konstrukcí, tj. u konstrukcí, kde κ je buď málo proměnné (malé rozdíly stáří), nebo část s odlišným κ je malá a má malou tuhost. Přitom má smysl ji užit pouze v případech, jedná-li se převážně o relaxaci napětí, tj. o vliv změny statického působení, posuvu podpor, změny teploty, předpětí, rektifikace, smršťování a nikoliv o vliv nehomogenity. (Pozná se to tím, že se nesmí jednat o případ, kdy účinek u odpovídající veličiny na homogenní konstrukci by byl nulový nebo velmi malý.) Dává potom velmi dobré hodnoty. Tak např. se hodí u letmo betonovaných mostů pro reakci konzoly na opěře krajního pole, ne však pro posouvající sílu v kloubu středního pole. Pro konstrukce, kde beton spolupůsobí s většimi ocelovými částmi, se nehodí. (Visutý most, oblouk s táhlem ap.) (Pro $\kappa \rightarrow \text{const.}$ musí se blížit k nule odchylka od řešení přesného vždy pouze v absolutní hodnotě. Poměrná odchylka vůči přesnému řešení se pro $\kappa \rightarrow 1$ může blížit k libovolné hodnotě, když pro $\kappa \rightarrow \text{const.}$ $\lim \Delta X = 0$, tj. když účinek na odpovídající veličinu homogenní konstrukce je nulový, neboť se pak jedná o limitu typu 0/0.)

Relaxační integrace je shodná s polygonální integrací v tom, že vnitřní síly $\Delta S^{(m)}$ se určují ze zatížení $-\Delta Z^{(m)}$ na dané pružné konstrukci. Přesnější by při daném dílku

$\Delta\varphi$ bylo, určovat je na konstrukci s moduly \overline{E} , jako při integraci interpolační. Dostáváme tak postup relaxační interpolační numerické integrace. Zřejmě platí pro něj opět schémata podle tab. 2a, b, kde však místo transformované konstrukce s moduly E'' je třeba uvažovat konstrukci s moduly $E'' = E/\kappa''$ a smrštění $\kappa'' \varepsilon_{sm}(\infty)/\varphi(\infty)$ a místo řešení dané pružné konstrukce s moduly E řešit konstrukci s moduly \overline{E} . Pro případy převážně relaxace napětí a malé nehomogenity je to většinou nejpřesnější způsob numerické integrace.

10. Užití partikulárního řešení

Při konstantním zatížením lze u staticky neurčité konstrukce z rovnic všech přibližných metod snadno vyloučit členy od vnějšího zatížení a smrštění, dosadí-li se za tyto členy podle rovnice pro partikulární řešení [2]. Tak např. pro polygonální numerickou integraci dostaneme rovnice

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \Delta X_j^{(m)} + \Delta\varphi \sum_{j=1}^n \delta'_{ij} (X_j^{(m)} - X_{jp}) = 0 \quad (6b)$$

a podobně u ostatních metod. Partikulární řešení X_{jp} je však vhodné užit pouze tehdy, je-li již předem známo, neboť jinak by jeho určení představovalo početní práci navíc. Z rovnice (5.6b) je též názorně vidět, že vnitřní síly se v čase nemění pouze tehdy, rovnají-li se partikulárním hodnotám. Jinak se s postupem času blíží k partikulárním hodnotám, a to tím pomaleji, čím jsou jim blíže. Nedosáhnou jich však, neboť hodnota $\overline{\varphi}(\infty)$ je konečná.

Nevýhodou přibližných řešení při užití běžných početních pomůcek je, že pro každý jednotlivý daný počáteční stav je (na rozdíl od obecného řešení v kap. 4) nutno celou výpočet opakovat. Je-li však tato změna malá, je vhodné podle principu superposice vypočítat vliv této změny zvlášť a výsledek přičíst, neboť to je možno již provést s mnohem menší poměrnou přesností. Stačí k tomu užit většinou jen jeden dílek některé numerické integrace.

Je-li známo partikulární řešení, lze pro hrubý odhad užit předpokladu, že průběhy $S(t)$ pro málo odlišné počáteční podmínky jsou navzájem afinní s osou v partikulárním řešení S_p .

Často se stává, že vzájemný vliv staticky neurčitých veličin je malý (koeficienty δ_{ij} pro $i \neq j$ jsou vůči δ_{ii} malé). Pak je možno přibližně zvolit základní statickou soustavu i jako staticky neurčitou. Volíme-li ji jako soustavu $(n-1)$ krát staticky neurčitou, vzniklou zrušením vazby X_i , a označíme-li příslušné pružnostní koeficienty δ''_{ii} , resp. δ''_{ii}^* , obdržíme přibližný vzorec

$$X_i(t) = X_{ip} + (X_i(t_k) - X_{ip}) e^{-(\delta''_{ii}^*/\delta''_{ii}) \overline{\varphi}(t)} \quad (22)$$

Někdy lze místo $\delta''_{ii}^*/\delta''_{ii}$ hruběji též dosadit δ'_{ij}/δ_{ii} . Vzorec lze v praxi užívat např. u letmo betonovaných rámových mostů s tuhými pilíři.

11. Výpočet deformace

Lze ukázat, že průběh deformace lze určovat zcela obdobně jako u vnitřních sil. Rozvoj v řadu nebo diferencní vztahy při numerické integraci jsou stejné jako pro vnitřní síly, přičemž místo vnitřních sil S' vyvolaných vnitřní deformací $D_S'' + D''_{sm,S}$ je třeba uvažovat deformace vyvolané toutéž vnitřní deformací na konstrukci s moduly E , resp. \overline{E} , tj. odpovídající silám S' .

12. Praktické použití jednotlivých metod a výpočet na samočinných počítačích

Pro užití v praxi je většinou nejvhodnější numerická integrace, a to hlavně integrace polygonální nebo Runge-Kutta. Velikost dílky $\Delta\varphi$ lze volit u prvé metody asi 0,04 až 0,1 při výpočtu na samočinném počítači a 0,2 až 0,4 při výpočtu běžnými pomůckami vzhledem k pracnosti. Výpočet jednoho kroku u druhé metody vyžaduje sice přes čtyřikrát více početní práce, avšak přesnost výpočtu je mnohokrát vyšší. Stačí volit dílky $\Delta\varphi$ asi 0,2 až 0,4, při výpočtu běžnými pomůckami případně i 1,0 až 2,0, tj. případně i jen jeden dílek.

Integraci rozvojem v mocninnou řadu (nebo postupnými aproximacemi) je vhodné užít tam, kde je třeba získat analytický výraz pro průběh vnitřních sil, který má být použit v nějakých dalších výpočtech. Z tohoto výrazu lze snadno určit hodnoty v libovolném čase a hodnoty vyšších derivací. Dává přesnější hodnoty pro menší $\bar{\varphi}$. Pro velká $\bar{\varphi}$ ($\bar{\varphi} > 1$) jsou odchylky značné, nebo řešení vůbec nekonzverguje.

Významnou vlastností numerické integrace i integrace rozvojem v řadu je to, že v jednotlivých krocích se opakuje řešení téže dané pružné konstrukce. U statické neurčité soustavy to má např. ten význam, že řešení je dáno vždy touž inverzní maticí $[\delta_{ij}]^{-1}$, jež bývá většinou již známa předem z výpočtu příčinkových čar. Převodem vnitřní deformace na zatížení lze k řešení dané konstrukce užít příčinkových čar nebo ploch, jež pro mnohé případy jsou sestaveny v tabulkách. Opakování stejného početního postupu v jednotlivých dílcích činí uvedené metody zvláště vhodné pro samočinné počítače.

Numerická integrace relaxační, vedoucí též na řešení dané pružné konstrukce (matice $[\delta_{ij}]^{-1}$), je vhodná při výpočtu běžnými pomůckami v těch případech, kdy se jedná převážně o relaxaci napětí u málo nehomogenní konstrukce (beton nespoleupůsobí s ocelí, rozdíl stáří méně než 1 rok; vliv posuvu podpor, změny teploty, statického působení nebo smršťování). Potom stačí volit asi $\Delta\varphi = 0,5$ až 2 (1 až 3 dílky) a chyba je velmi malá.

Ze všech metod je z hlediska přesnosti při stejné početní práci obvykle nejvýhodnější numerická integrace interpolační podle odst. 5.13. Často u ní stačí užít jen jeden dílek $\Delta\varphi = \bar{\varphi}(\infty)$. Na rozdíl od předcházejících metod však nevede na řešení dané pružné konstrukce s maticí $[\delta_{ij}]$, takže u složitějších konstrukcí, jsou-li předem k dispozici příčinkové čáry nebo plochy a konstrukcí s pruty složených průřezů, homogenními po řešení složených průřezů a konstrukcí s pruty složených průřezů, homogenními po délce prutů, je to nejvýhodnější přibližná metoda (obvykle stačí 1 až 3 dílky). Jedná-li se převážně o relaxaci napětí u málo nehomogenní konstrukce, je ještě přesnější relaxační interpolační integrace.

Přibližné řešení ideálními moduly nebo obrácenou numerickou integrací též nevede na řešení dané pružné konstrukce a co do přesnosti je přibližně rovnocenné numerické integraci polygonální. Má smysl užít je pouze jako hrubší řešení, a to tehdy, když se jedná o výpočet vlivu zatížení, které přistoupilo veškeré až v definitivním statickém systému (např. u složeného průřezu).

Příkladem moderních konstrukcí se značným vlivem dotvarování a smršťování na vnitřní síly jsou zavěšené betonové mosty trámové. Jde obvykle o konstrukci mnohokrát staticky neurčitou, takže je nutno užít k řešení přibližné metody a výpočet nejlépe provést na samočinném počítači. K názoru na velikost účinků uvedme výsledky z návrhu silničního mostu tohoto typu 9-krát staticky neurčitého o polích 46 + 115 + 46 m se dvěma železobetonovými pylony výšky 18 m, do jejichž vrcholů se sbíhá s obou stran po dvou šikmých závěsných lanech. Změny sil v lanech vyšly max. 7 %

změny extrémních ohybových momentů v trámu průměrně 30 až 40 %, maximálně až 69 % vůči hodnotám od stálého zatížení.

Přibližné metody převádí problém nehomogenního dotvarování na řadu řešení téže dané pružné konstrukce podle teorie pružnosti pro různé případy obecné vnitřní deformace nebo zatížení, takže problém lze považovat za quasistatický. Z toho plyne, že každá úloha početně řešitelná pro obecné zatížení objemovými a povrchovými silami podle teorie pružnosti je početně řešitelná i pro nehomogenní dotvarování a smršťování přibližnou konvergující metodou, již lze dosáhnout libovolně malé chyby. Problém dotvarování a smršťování je tím převeden na problém teorie pružnosti.

LITERATURA

1. Bažant Z. P., Vliv dotvarování a smršťování u staticky neurčitých konstrukcí z betonu různého stáří. Inženýrské stavby 11, 426, Praha 1961. — 2. Bažant Z. P., Teorie dotvarování a smršťování betonu v nehomogenních konstrukcích a průřezech. Stavebnický časopis 9, 552, Bratislava 1962. Zkrácený výtah stejnojmenné dizertační práce, uložené v ÚTAM-ČSAV, Praha 1962. — 3. Bažant Z. P., Die Berechnung des Kriechens und Schwindens nicht homogener Betonkonstruktionen. V. Kongres, Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau v Rio de Janeiro 1964, Vorbericht. — 4. Collatz L., Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin, 1951, Springer. — 5. Dimel E., Schrägseilbrücken aus Beton als Sonderfall vorgespannter Betonkonstruktionen. 4. Kongres, Fédération Internationale de la Précontrainte, Th. II, 160, Řím 1962. — 6. Rektorys K. a spol., Přehled užité matematiky. SNTL, Praha 1963. — 7. Vojtěch J., Základy matematiky I. SNTL (5. vyd.), Praha 1959.

Další literatura je uvedena v práci [2].

Odevzdáno 20. 6. 1963

Diskusní příspěvky k tomuto článku (v rozsahu nejvíce 2 stran) pošlete trojmo redakci časopisu do 31. 10. 1964, aby bylo možno je uveřejnit v únorovém čísle 1965.

Зденек П. Бажант

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ И УСАДКИ НЕОДНОРОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АВТОМАТИЧЕСКИХ СЧЕТНЫХ МАШИН

В данной статье, которая является продолжением работы автора [2], указан метод учета влияния ползучести и усадки неоднородных конструкций как например многократно статически неопределимых конструкций и граничных задач данных дифференциальными уравнениями. Решение в общем виде согласно [2] в этих случаях является слишком трудоемкими или невозможным. Поэтому нужно решать каждое исходное напряженное состояние особо приближенными методами, при помощи которых можно достичь любой требуемой точности. Основным предположением является гипотеза Двишнера о линейной ползучести бетона, определяемой коэффициентом $\varphi(t)$. При неоднородной ползучести исходит согласно [2] из предположения взаимной аффинности кривых $\varphi(t)$ выражаемой коэффициентами аффинности κ .

Статически неопределимые величины $X_i(t)$ определяются при помощи степенного ряда (2) с остатком, которым можно пренебречь. Для коэффициентов $X_{i\infty}$ можно вывести рекуррентные системы линейных уравнений (4) (см. табл. 1а), в которых δ_{ij} и δ'_{ij} обозначают коэффициенты упругости данной и трансформированной системы соотв. Под трансформированной конструкцией подразумевается конструкция тождественная с данной, но имеющая коэффициенты упругости $E' = E/\kappa$ и $\mu' = \mu$, $\delta'_i(t)$, $\delta'_i(t)$ и δ'_{im} , обозначающие соотв. деформацию основной системы от внешней нагрузки в момент времени t и от относительных усадок $\kappa_{em}(\infty)/\varphi(\infty)$ и $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi(t_k)$ где t_k начальный

момент времени. Обобщенно можно получить процесс определения коэффициентов $S_{(\alpha)}$ ряда для произвольной внутренней силы $S(t)$ (напряжения, изгибающего момента) любой упругой системы с неоднородной ползучестью. При этом $S_{(\alpha)}$ является внутренней силой вызванной в данной упругой конструкции внутренними деформациями $D_{S(\alpha-1)}$ согласно табл. 1b, при чем $D_{S(\alpha-1)}$ обозначает внутреннюю деформацию соответствующую у трансформированной конструкции внутренним силам $S_{(\alpha-1)}$ и $S_1(t)$ и $S'_{m(t)}$ соотв., внутренней силе соответствующей внешней нагрузке в момент времени t у данной и усадку $\kappa \bar{\epsilon}_{m(\infty)} / \varphi(\infty)$ у трансформированной конструкции соотв.

При решении при помощи численного интегрирования с шагом $\Delta \bar{\varphi}$ вычисляются постепенные изменения $\Delta X_{i(m)}$ в $(m+1)$ интервале по конечным значениям $X_{i(m)}$ в предыдущем интервале (уравнение (6) табл. 2). Решение можно также обобщить любой внутренней силой $S^{(m)}$ произвольной упругой системы. Ее изменение $\Delta S^{(m)}$ в $(m+1)$ интервале $\Delta \bar{\varphi}$ является внутренней силой вызванной в данной упругой системе внутренними деформациями $D_{S^{(m)}} \Delta \bar{\varphi}$ и усадками $\kappa \bar{\epsilon}_{m(m)} = \Delta \bar{\varphi} \kappa \bar{\epsilon}_{m(m)}(\infty) / \varphi(\infty)$ увеличенной на влияние приращения внешней нагрузки, при чем $D_{S^{(m)}}$ обозначает внутреннюю деформацию соответствующую у трансформированной конструкции внутренним силам $S^{(m)}$.

Процесс численного интегрирования и разворачивания в ряд можно также использовать при так называемом обратном процессе, когда по требуемым окончательным значениям $S(\infty)$ нужно определить начальные значения $S(t_0)$, которые нужно осуществить при постройке. Выгодной особенностью численного интегрирования и разворачивания в ряд является то, что при каждом шаге (табл. 1 и 2) повторяется решение данной упругой системы, которое у статически неопределяемой конструкции дано обратной матрицей $[\delta_{ij}]^{-1}$. Эта матрица обыкновенно известна перед началом решения или ее можно определить при помощи линий или поверхностной влияния, которые обычно известны наперед. Эта особенность делает решение особенно выгодным в случае применения автоматических вычислительных машин особенно в том случае если нужно проанализировать несколько последовательных состояний.

Кроме того выведены и другие приближенные решения, в частности решение при помощи так называемых идеальных модулей деформации, решение численным интегрированием Рунге-Кутты, интерполяционным и нелинейным и вычисление деформации.

Решение данное в работе [2] и в данной работе является наиболее общим при ползучести согласно Диншера. Это решение применимо и в случае недействительности предположения о аффинности кривых добавочного деформирования или даже линейности, по его трудоемкость в этом случае увеличивается. Из факта возможности решения проблемы действительной ползучести при помощи повторного решения упругой системы следует, что каждая задача теории упругости решимая для общего случая внутренней деформации является также решимой в случае неоднородной ползучести.

Замечания и отзывы к этой статье надо послать в трех копиях (не больше 2 страниц) редакции журнала до 31. 10. 1964 г., чтобы можно было опубликовать их в февральском номере 1965 г.

Zdeněk P. Bažant

APPROXIMATE METHODS OF SOLUTION OF CREEP AND SHRINKAGE OF COMPLICATED NON-HOMOGENEOUS STRUCTURES AND THE USE OF COMPUTERS

In the present paper, related to the paper by the author [2], the analysis of effects of creep and shrinkage is given with regard to more complicated non-homogeneous structures such as many times statically indeterminate structures and boundary problems given by differential equations. The general solution according to [2] in these cases is either to cumbersome by or even impossible. The problem is solved for each initial state of internal forces separately by approximate methods, covering to the exact solution and allowing therefore the solution to be of arbitrarily small error. The fundamental assumption adopted is Dischinger's course for linear creep of concrete, expressed by creep factor $\varphi(t)$. For the nonhomogeneity of creep it is supposed according to [2], that there exists a mutual affinity of curves $\varphi(t)$ which is expressed by affinity factors of creep κ .

The solution of statically indeterminate quantities $X_i(t)$ may be found in the form of a power series (2) with residue which may be neglected. For coefficients $X_{i(\alpha)}$, recurrent systems of linear equations (4) are set up (see tab. 1a), where δ_{ij} or δ'_{ij} express the elasticity coefficients of the given and transformed structure respectively, i. e. of the structure equal to the given one but having its elasticity constants $E' = E/\kappa$ and μ' , and where $\delta_i(t)$, $\delta'_i(t)$ or δ'_{mi} denote the deformations of the primary system in the sense of X_i due to external load in time t or to specific shrinkage $\kappa \bar{\epsilon}_{m(\infty)} / \varphi(\infty)$ and $\bar{\varphi}(t) = \varphi(t) - \varphi(t_0)$, where t_0 is the initial time. By generalization a procedure is found for the evaluation of coefficients $S_{(\alpha)}$ of the series (2a) for any internal force $S(t)$ (stress, bending moment, ...) of arbitrary elastic system subject to non-homogeneous creep. It is shown, that $S'_{(\alpha)}$ is equal to an internal force produced in the given elastic structure by internal strains $D'_{S(\alpha-1)}$ according to tab. 1b, where $D_{S(\alpha-1)}$ is an internal deformation corresponding in the transformed structure to the internal forces $S_{(\alpha-1)}$ and $S_1(t)$ or $S'_{m(t)}$ the internal strain corresponding to external force in time t_0 acting on the given and transformed structure respectively. The effect of the internal strain D'_s or D'_{sm} may be also replaced by volume forces and by the specific load given by eq. (11), (12) as a loading case for the calculation of $S_{(\alpha)}$.

If the solution is carried out by numerical integration over the portions $\Delta \bar{\varphi}$, the changes $\Delta X_{i(m)}$ in the m -th portion are evaluated successively from the resulting values $X_{i(m-1)}$ in the preceding-portion [eq. (6), tab. 2]. This procedure may also be generalized for a general internal force $S^{(m)}$ of arbitrary elastic system. Its variation $\Delta S^{(m)}$ in the m -th portion $\Delta \bar{\varphi}$ is equal to the internal force produced in the given elastic structure by internal strains $D_{S^{(m)}} \Delta \bar{\varphi}$ and by shrinkages $\kappa \bar{\epsilon}_{m(m)} = \Delta \bar{\varphi} \kappa \bar{\epsilon}_{m(m)}(\infty) / \varphi(\infty)$ increased by the influence of the increment of external load, $D_{S^{(m-1)}}$ denoting internal strain, corresponding to internal forces $S^{(m-1)}$ which are in action in the transformed structure.

The procedure of numerical integration and of expansion into series may also be used for the so-called backward procedure consisting in the backward determination of the necessary initial values $S(t_0)$ to be introduced on the site from the required final values $S(\infty)$.

It is an advantageous feature of the numerical integration and of the solution using the expansion into series, that at each step (Tab. 1 and 2) the solution of the same elastic system is repeated, which e. g. in the case of a statically indeterminate structure is given by inverse matrix $[\delta_{ij}]^{-1}$ and usually is known before the calculation is started or may be found from the influence lines or influence surfaces usually known beforehand. This feature makes the present procedure particularly convenient for calculation by automatic computers, especially if it is necessary to take account of several initial stages.

In the following part of the paper, other approximate solutions are derived, especially solutions, using the so-called ideal moduli (equation 20). The value of the error, committed owing to the use of this method of solution is not known in advance and cannot be arbitrarily reduced. There are other kinds of numerical integration derived in the paper, e. g. the interpolational and exponential numerical integration. Further the deformations are also analyzed.

The solution given in paper [2] as well as in this paper is the most general solution possible in case that Dischinger's assumption for creep is adopted. It would be feasible even in the case, if the assumption of affinity of the creep curves should not hold good, of course at the cost of increased amount of calculation work required. The reduction of the problem of creep to repeated solutions of the given elastic system shows, that every problem soluble on the assumption of the theory of elasticity for any internal strain may also be solved for the case of non-homogeneous creep.

Discussion of this paper should be sent in triplicate (one copy not exceeding 2 pages) to the Editor by 31. 10. 1964, to be published in the February 1965 issue of this Journal.

DISKUSIA

k článku A. A. Gvozďeva

ZÁKLADNÍ ÚKOLY TEORIE ŽELEZOBETONU PRO NEJBLIŽŠÍCH 20 LET

V čísle 7/1963 Stavebnického časopisu jsme uveřejnili stručný výťah z článku prof. A. A. Gvozďeva, uveřejněného v časopise Izvestija ASIA SSSR v čísle 4/1962. Na výzvu k diskusi jsme dostali řadu odpovědí. Protože nelze pro nedostatek místa uveřejnit všechny příspěvky v plném rozsahu, omezuje se na otáčení nejzávažnějších názorů a námětů.

Diskuse se zúčastnili: doc. inž. V. Fraňo, C. Sc. (VÚIS Bratislava), prof. inž. dr. K. Havelka, člen-korešpondent SAV (SVŠT, Bratislava), prof. inž. dr. K. Hruban, člen-korešpondent ČSAV (FS-ČVUT, Praha), doc. inž. dr. I. Hruban, C. Sc. (VUT, Brno), inž. J. Krehov, C. Sc. (SÚ-ČVUT), doc. inž. J. Paul (FS-ČVUT), dr. inž. O. Valenta, C. Sc. (SÚ-ČVUT), inž. M. Tichý, C. Sc. (SÚ-ČVUT), inž. M. Vorlíček, C. Sc. (SÚ-ČVUT), doc. inž. J. Zvara (SVŠT).

Prof. Hruban:

Spotřeba energie pro ten sektor výstavby, který využívá betonových konstrukcí, je zhruba úměrná kubatuře vestavěného betonu a váze spotřebované měkké i předpínané oceli. Tuto skutečnost musíme mít na mysli při stanovení směrů vývoje teorie železobetonových konstrukcí.

Přijde u nás tedy především o vědecké řešení oněch problémů, které hledají cesty k úspoře kubatury stavebních konstrukcí takovým způsobem, aby se přitom nezměnila jejich stabilita a jejich funkční použitelnost. K tomuto cíli vedou v podstatě dvě cesty:

- a) zlepšování mechanických vlastností betonu a oceli tak, aby bylo možné zachytit stejné síly menšími průřezy stavebních prvků,
- b) vynalézání takových nových typů konstrukcí, které vyhoví pro žádaný účel při menší spotřebě materiálů.

Z tohoto vyplývá jasně, jak by měla být zaměřena základní vědecká práce v oboru teorie betonových konstrukcí u nás.

Prof. Havelka, doc. Zvara:

Pozornost třeba obrátit jednoznačně na lehké stavební hmoty, které z výroby mají vycházet ve formě takmer hotových prvků (stropné prvky, obvodový plášť, rozdělovací přičky, hotové nosné prvky a podobně) a ne surový materiál vyžadující náročný spracovatelský proces na stavbe.

Viac sa venovať použitiu kovov. V prípade uskutočnenia myšlienky odzbrojenia (či už čiastočného alebo úplného) budú ekonomické hľadiská (i keď dnes veľmi obmedzené) dovoľovať širšie použitie najmä ľahkých kovov, ktoré v kombinácii s ľahkými betónmi majú budúcnosť nielen pri bytovej a občianskej výstavbe, ale aj pri mostoch, najmä väčších rozpätí. Dnešné tendencie vo výskume — znížiť váhu ocele na minimum — nebudú v nijakom prípade opodstatnené.

V oblasti betonových konstrukcií je potrebné zvýrazniť tendencie po väčších rozpätiach pri zastrešení priemyselných objektov, kde dnešné moduly podporných systémov 9×18 m, príp. 18×24 m zďaleka nepostačila hlavne pri zmenách výrobných programov podnikov, ktoré sa nevyhnutne v budúcnosti dostavia v celom rade priemyslových odvetví. Dnešný smer vývoja v zastrešení veľkých pôdorysov (strešný plášť) treba vidieť nie v systéme väzník — strešná doska, ale v celých priestorových tenkostenných skupinových prvkoch (napr. armocementových) kompletovaných už s krytinou a s použitím skla tak, aby zastrešený priestor mal rovnomerné prirodzené osvetlenie pracovného prostredia.

Doc. Hruban:

Při několika velkých mezinárodních soutěžích v Americe a v Evropě se dospělo k poznatku, že vhodně uspořádaná skořepinová konstrukce je v přítomné době nejhospodárnějším řešením střešních na velké rozpory.

Praktické využití skořepin je stále brzděno nedostatkem teoretických podkladů pro vyšetření