

Mathematische Ermittlung der rheologischen Eigenschaften von glasfaserverstärkten Plasten für die Berechnung von Konstruktionen

Mitteilung aus dem Bauforschungsinstitut der Technischen Hochschule, Prag (ČSSR)

In der vorliegenden Arbeit wird zuerst das Kriechen von glasfaserverstärkten Plasten unter der Annahme der linearen Viskoelastizitätstheorie behandelt. Für die Berücksichtigung von irreversiblen Kriechformänderungen wird dann ein neues rheologisches Modell entworfen. In seiner einfachsten Form die nur für ein begrenztes Intervall nach dem Aufbringen der Last gilt, besteht das Modell aus 5 Federn und Dämpfern und einem Schnapper, der die Nichtlinearität in Beziehung zur langzeitigen und zur bleibenden Deformation bringt. Der Vorteil dieses Modells ist seine einfache mathematische Behandlung. In den meisten Fällen der Beanspruchung von Konstruktionen, z. B. konstante Last oder konstante erwungene Formänderung, führt dieses Modell zur linearen Viskoelastizität.

Weiterhin werden neue Formeln zur mathematischen Ermittlung der Elastizitätskonstanten für die ebene Beanspruchung oder die Biegebeanspruchung einer GFP-Platte in Abhängigkeit von der Glasfaserverstärkung abgeleitet, in denen auch der Einfluß von Querfasern berücksichtigt wird. Für die Beanspruchung schräg zum Gewebe wird die Ermittlung von kurzzeitigen Formänderungen angegeben, die auch im nichtlinearen Bereich (gekrümmtes Arbeitsdiagramm) gültig ist.

Außerdem werden geeignete Gleichungen für die Berücksichtigung des Temperatureinflusses und für die Bestimmung der Lebensdauer nach dem Spannungs- und Formänderungsverlauf entworfen.

1. Spezifische Probleme der Berechnung von GFP-Konstruktionen

Konstruktionen aus glasfaserverstärkten Plasten (GFP) werden in der letzten Zeit im Bauwesen, Schiffbau, Maschinenbau, Flugzeug- und Raketenbau immer häufiger angewendet. Es ist deshalb notwendig, ihre spezifischen Eigenschaften eingehend zu untersuchen und mathematisch zu formulieren.

Für das mechanische Verhalten von GFP sind vor allem folgende Probleme charakteristisch: 1. die Zeit und ihr Einfluß auf die Spannungsverteilung, die Deformationen, die Dauerfestigkeiten und die Lebensdauer. 2. die Ermittlung der durch die Glasfaserverstärkung verursachten Anisotropie und Inhomogenität. 3. der Temperatureinfluß. 4. das Bruchkriterium für den mehrachsigen Spannungszustand, auch unter Berücksichtigung des Zeiteinflusses. In dieser Arbeit werden hauptsächlich die rheologischen Faktoren, d. h. die Probleme 1 und 2, behandelt, wobei der Fall sehr hoher Temperaturen ausgenommen ist.

Langzeitige Formänderungen, die als Kriechen bezeichnet werden, beeinflussen in den Konstruktionen: 1. die Spannungsumlagerungen infolge der inneren Inhomogenität und Anisotropie des GFP und die Inhomogenität der statisch unbestimmten Konstruktionen oder Elemente. 2. die Stabilität unter Dauerlast. 3. die Größe der Deformationen. 4. die Sicherheit gegen Bruch unter Dauerlast (Dauerfestigkeit als Funktion des Spannungsverlaufs).

Die innere Inhomogenität besteht im Zusammenwirken von Harz und Glasfasern. Die Inhomogenität der Konstruktion wird hauptsächlich durch das Zusammenwirken mit anderen Materialien verursacht, z. B. mit Stahl, Leichtmetallen, Beton, Holz u. a. Werkstoffen. Als Beispiel dienen Sandwichkonstruktionen, wie Träger, Platten und Schalen, die mit Metall verstärkt sind. Bogen oder Schalen mit Zugbändern, Hängeträger (statisch unbestimmte Systeme), Verbindungen von verschiedenen GFP-Teilen usw. Eine bedeutende Inhomogenität entsteht manchmal in Konstruktionen, deren Teile aus GFP verschiedener Art, vor allem in Verbundträgern, bestehen, z. B. geschichtete Platten mit unterschiedlichem Verstärkungsanteil oder unterschiedlicher Art der Verstärkung (Gewebe, Matte) der einzelnen Schichten.

Die Inhomogenität bewirkt beim Kriechen die Umlagerung der Innenkräfte aus den Teilen, bei denen das Kriechen größer ist, in die Teile, die weniger kriechen (höherer Verstärkungsanteil, Metall, Glas). Die orthotrope Struktur des GFP verursacht die Spannungsumlagerung, z. B. bei der Biegung von orthotropen GFP-Platten, bei denen das Kriechen für die Drillmomente bedeutend größer ist als für die Biegemomente, so daß sich unter Dauerlast die Biegemomente mit zunehmender Zeit vergrößern und die Drillmomente abnehmen. Dasselbe Verhalten ist auch beim ebenen, statisch unbestimmten Spannungszustand zu finden, bei dem sich die Normalspannungen vergrößern und die Schubspannungen verringern.

Die charakteristischen Eigenschaften des Kriechens verschiedener Werkstoffe unterscheiden sich wesentlich voneinander. Das Kriechen von Stahl und Leichtmetallen zeichnet sich durch starke Nichtlinearität und Abhängigkeit von der Temperatur aus, wobei zugleich die Unveränderlich-

keit des Volumens und die Irreversibilität von Kriechformänderungen als Vereinfachung angenommen werden können. Das Betonkriechen hat dagegen eine gute Linearität und kleine Reversibilität, hängt aber wesentlich vom Alter, von der Feuchtigkeit der Umgebung, den Abmessungen und der Form ab, wobei das Volumen veränderlich ist. Das Setzen von Tonschichten ist besonders von den Abmessungen und den Randbedingungen abhängig. Das Kriechen von GFP ist annähernd linear, aber anisotrop, teilweise reversibel und stark temperaturabhängig, wobei das Alter sowie die Abmessungen fast keine Rolle spielen.

Die rheologischen Eigenschaften von GFP wurden bereits von einigen Forschern untersucht [8, 9, 10]. In dieser Arbeit versuchen wir kurz für die wichtigsten Fälle der Beanspruchung und der Zeitverläufe eine allgemeine Formulierung abzuleiten, die mit den bisherigen Erkenntnissen übereinstimmt.

2. Formänderungen des Harzes unter der Annahme der linearen Viskoelastizitätstheorie

Zuerst muß man das rheologische Verhalten des Harzes betrachten.

Die kurzzeitigen Dehnungen ϵ_x bei einachsiger Beanspruchung durch eine Normalspannung σ_x sind praktisch linear. Der Begriff des Elastizitätsmoduls E_P ist aber durch den Einfluß des kurzzeitigen Kriechens sehr relativ. Er wird gewöhnlich angenommen als der Modul, der bei der Geschwindigkeit der Spannungszunahme $d\sigma_x/dt = \sigma_{xB}/\text{min}$ gemessen wird, wobei σ_{xB} die Bruchfestigkeit bedeutet. Die Dehnungen gehen bei Spannungsabnahme nach der ersten Belastung zu 80 bis 90% zurück, und ihr Modul wird größer. Die Querdehnungen sind nicht völlig linear (die Poissonsche Zahl μ für Polyester steigt von etwa 0,28 für $0,2 \sigma_{xB}$ auf etwa 0,33 für $0,5 \sigma_{xB}$), jedoch kann man sie auch als annähernd linear annehmen. Mit Rücksicht auf die Isotropie des Harzes ist der Schubmodul durch $G_P = \frac{1}{2} E_P / (1 + \mu_P)$ gegeben.

Jetzt sollen die langzeitigen Verformungen des Harzes näher untersucht werden. Wir betrachten zuerst ein begrenztes Intervall, dessen Anfang und Ende vom Beginn des Aufbringens der Last an gemessen, sich nicht viel voneinander unterscheiden, d. h., sie sollen von gleicher Größenordnung sein (z. B. sollen sie einen Zeitraum von 3 bis 180 Tagen nach dem Aufbringen der Last umfassen, aber nicht in einer Zeit von 10 min bis 180 Tagen liegen). Die einfachste Form der Kriechkurve, d. h. die Dehnung $\epsilon_x(t)$ in Richtung der Koordinatenachse in Abhängigkeit von Zeit t unter einachsiger Beanspruchung durch eine konstante Normalspannung $\sigma_x(t)$, ist durch eine Exponentialkurve gegeben [8], wobei die Endlichkeit der Grenzwerte von $\epsilon_x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ theoretisch vorausgesetzt werden kann. Die Kriechkurve läßt sich also in folgender Form schreiben (Bild 1):

$$\epsilon_x(t, \tau) = \sigma_x(\tau) \left[\frac{1}{E_{P\infty}} - \left(\frac{1}{E_{P\infty}} - \frac{1}{E_P} \right) e^{-\frac{t-\tau}{\tau_P}} \right] \quad (1)$$

Hierin bedeuten τ den Zeitpunkt des Aufbringens der Spannung σ_x und E_P , $E_{P\infty}$ und τ_P Materialkonstanten; $E_{P\infty}$ ist

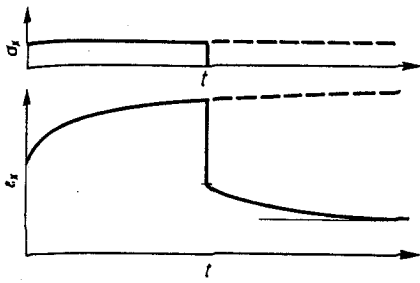


Bild 1

der Modul für den Endwert $\epsilon_x(\infty) = \sigma_x/E_{P\infty}$. $E_{P\infty} \leq E_P$: τ_P ist die sog. Retardationszeit. Für Polyester ist gewöhnlich $E_{P\infty} = 0,25$ bis $0,5 E_P$, $\tau_P = 30$ bis 40 Tage.

Der Verlauf von $\epsilon_x(t)$ für zeitlich veränderliche Spannungsbeanspruchung $\sigma_x(t)$ ist in einfachster Weise zu ermitteln, wenn die Gültigkeit des Superpositionsprinzips für die in verschiedenen Zeitpunkten aufgetragenen Belastungen oder Verformungen vorausgesetzt wird. Dann ist

$$\epsilon_x(t) = \sigma_x(t_0) \left[\frac{1}{E_{P\infty}} - \left(\frac{1}{E_{P\infty}} - \frac{1}{E_P} \right) e^{-\frac{t-t_0}{\tau_P}} \right] + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma_x(\tau)}{d\tau} \left[\frac{1}{E_{P\infty}} - \left(\frac{1}{E_{P\infty}} - \frac{1}{E_P} \right) e^{-\frac{t-\tau}{\tau_P}} \right] d\tau, \quad (2)$$

woraus man nach einer partiellen Integration erhält:

$$\epsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E_P} + \frac{1}{\tau_P} \left(\frac{1}{E_{P\infty}} - \frac{1}{E_P} \right) \int_{t_0}^t \sigma_x(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{\tau_P}} d\tau \quad (3)$$

Wenn der Verlauf von $\epsilon_x(t)$ gegeben ist, bildet diese Gleichung die Integralgleichung von Volterra für die Unbekannte $\sigma_x(t)$. Infolge der Einführung der Exponentialfunktion in Gleichung (1) kann man diese Gleichung leicht in eine Differentialgleichung überführen. Wenn die 1. Ableitung von Gleichung (3) nach t gebildet wird, findet man, daß darin das gleiche Integral wie in Gleichung (3) auftritt. Wird dieses Integral aus beiden Gleichungen eliminiert, so bekommt man folgende lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\tau_P \dot{\epsilon}_x + \epsilon_x = \frac{\tau_P}{E_P} \dot{\sigma}_x + \frac{1}{E_{P\infty}} \sigma_x \quad (4)$$

Sie bildet die Grundgleichung für das Kriechen. Hier bedeutet $\dot{\epsilon}_x, \dot{\sigma}_x$ die erste Ableitung nach der Zeit t (d. h. Geschwindigkeit).

Wenn man in Gleichung (4) $\dot{\epsilon}_x = 0$ und $\epsilon_x = \epsilon_{x0}(\tau)$ (Relaxation bei konstanter, im Zeitpunkt τ erzwungener Formänderung ϵ_{x0}) einsetzt, ergibt sich nach Lösung der Differentialgleichung die Relaxationskurve:

$$\sigma_x(t, \tau) = \epsilon_{x0}(\tau) \left[E_{P\infty} + (E_P - E_{P\infty}) e^{-\frac{E_P}{E_{P\infty}} \frac{t-\tau}{\tau_P}} \right] \quad (5)$$

Es wäre gleich gewesen, wenn man, um zu dieser Gleichung für die Relaxationskurve zu kommen, statt von Gleichung (1) von Gleichung (4) ausgegangen wäre. Man hätte dann nach dem Superpositionsprinzip für die Formänderungen in ähnlicher Weise die Integralgleichung

$$\sigma_x(t) = E_P \epsilon_x(t) - \left(\frac{E_P}{E_{P\infty}} - 1 \right) \frac{E_P}{\tau_P} \int_{t_0}^t \epsilon_x(\tau) e^{-\frac{E_P}{E_{P\infty}} \frac{t-\tau}{\tau_P}} d\tau \quad (3a)$$

erhalten, die die Resolvente von Gleichung (3) darstellt. Sie führt wieder zur Gleichung (4).

Ein weiterer wichtiger Fall ist das Arbeitsdiagramm für eine konstante erzwungene Formänderungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_x_0$. Die Lösung der Differentialgleichung bei der Anfangsbedingung $\epsilon_x = \sigma_x = 0$ für $t = 0$ ergibt:

$$\sigma_x(t) = E_{\infty} \dot{\epsilon}_x_0 \left[t + \tau_P \left(1 - \frac{E_{P\infty}}{E_P} \right) \left(1 - e^{-\frac{E_P}{E_{P\infty}} \frac{t}{\tau_P}} \right) \right] \quad (6)$$

Bei konstanter Dauerlast nähern sich die Formänderungen und Spannungen in jeder Konstruktion für $t \rightarrow \infty$ einem Grenzwert, der aus der Elastizitätstheorie für $E_{P\infty}$ bestimmt werden kann. Diese einfache Eigenschaft folgt aus Gleichung (4) bei $\dot{\sigma}_x = 0, \dot{\epsilon}_x = 0$.

Bisher haben wir nur ein begrenztes Intervall mit Anfangs- und Endzeiten von nicht wesentlich unterschiedlicher Größenordnung betrachtet. Wenn das Kriechen für ein längeres Intervall nach Lastaufbringung formuliert werden soll, muß man in Gleichung (1) mehrere (n) Exponentialglieder mit verschiedenen Relaxationszeiten $\tau_{P1}, \tau_{P2}, \dots$ einführen. Bei Annahme des Superpositionsgesetzes erhält man bei analogem Vorgehen wie bei Gleichung (1) bis (3) die Integralgleichung mit dem aus mehreren (n) Exponentialfunktionen bestehenden Kern. Diese Integralgleichung kann man in eine lineare Differentialgleichung höherer (n -ter) Ordnung für ϵ_x und σ_x umwandeln. Sie hat allgemein die Form

$$E_P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \epsilon_x = \sigma_x, \quad (7)$$

in der $E_P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ einen Differentialoperator in Form des Verhältnisses zweier Polynome von $\partial/\partial t$ bedeutet, d. h.

$$E_P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + \dots + b_m \frac{\partial^m}{\partial t^m}}{a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + \dots + a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}}. \quad (8)$$

Bei endlichen Formänderungen für $t \rightarrow \infty$ muß gelten $b_0/a_0 = E_{P\infty}$. Unter Berücksichtigung von augenblicklichen elastischen Formänderungen gilt: $m = n$ und $b_n/a_n = E_P$. Gleichung (4) bildet einen speziellen Fall für

$$E_P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{1 + \tau_P \frac{\partial}{\partial t}}{\frac{1}{E_{P\infty}} + \frac{\tau_P}{E_P} \frac{\partial}{\partial t}} \quad (8a)$$

Im allgemeinsten Fall des linearen Kriechens (Viskoelastizität) gehen die Polynome in Gleichung (8) in unendliche Potenzreihen über. Eine entsprechende äquivalente Formulierung in Form der Integralgleichung von Volterra ist Gleichung (7), in der

$$E_P^{-1} \sigma_x = \frac{\sigma_x(t)}{E_P} + \int_{t_0}^t \frac{\sigma_x(\tau)}{E_P} L_P(t-\tau) d\tau \quad (9a)$$

oder

$$E_P \epsilon_x = E_P \epsilon_x(t) + \int_{t_0}^t E_P \epsilon_x(\tau) Q_P(t-\tau) d\tau, \quad (9b)$$

wobei jede Gleichung die Resolvente zur anderen ist.

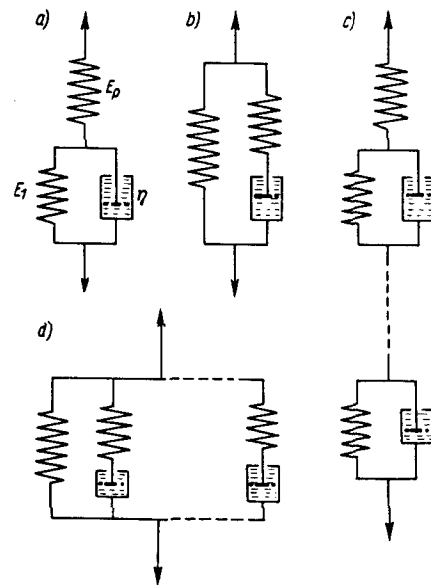


Bild 2

$L_P(t)$ oder $Q_P(t)$ sind hier allgemeine, jedoch miteinander eindeutig verbundene Funktionen (Kerne). Gleichung (9a), (9b) werden als Theorie der elastischen Nachwirkung bezeichnet.

Sehr anschaulich ist es, wenn man die angeführten Gleichungen durch ein mechanisches, aus Federn und Dämpfern zusammengesetztes rheologisches Modell darstellt. Gleichung (4) wird durch das sog. normale Modell nach Bild 2a oder das äquivalente Modell nach Bild 2b dargestellt.

Im allgemeinsten Fall der linearen Viskoelastizität, Gleichung (7) oder (9a), (9b), steigt die Zahl der Federn und Dämpfer sowie die ihrer Verbindungen verschiedener Art bis ins Unendliche. Der allgemeine Fall der Relaxation bei gegebenem Formänderungsverlauf läßt sich als unendliche Reihe von parallel geschalteten Maxwell-Elementen ausdrücken (Wiechert-Modell, Bild 2d). Das allgemeine Kriechen bei vorgeschriebenem Spannungsverlauf kann man mit einer unendlichen Reihe von hintereinandergeschalteten Voigt-(Kelvin-)Elementen (allgemeines Kelvin-Modell, Bild 2c) beschreiben.

Für die Berechnung einer Konstruktion ist es jedoch nicht vorteilhaft, ein aus mehr als 5 Elementen bestehendes, auf eine Gleichung 2. Ordnung führendes Modell anzuwenden. Die Verhältnisse der Viskosität zur Federkonstante einzelner Voigt-Elemente beim Wiechert-Modell sind gleich den Relaxationszeiten $\tau_{P_1}, \tau_{P_2}, \dots$. Die Abhängigkeit der Federkonstanten E_1, E_2, \dots von den Relaxationszeiten $\tau_{P_1}, \tau_{P_2}, \dots$ bildet das sog. Relaxationsspektrum. In ähnlicher Weise wird das Retardationsspektrum beim Kelvin-Modell hergeleitet. Dieses Spektrum beschreibt die Relaxation oder die Kriechkurve. Beim Modell mit einer unendlichen Zahl von Elementen ist es diskret. Analytisch ist es aber auch möglich und manchmal vorteilhaft, ein stetiges Spektrum, z. B. in Form der Funktion $E_P = c \tau_P^{-n} e^{-\tau_P/\tau_0}$, mit den Konstanten c, n und τ_0 zu behandeln [die Ordnung der Gleichung (7) steigt hier ins Unendliche].

Weiterhin ist es notwendig, die Querdehnung $\varepsilon_y(t)$ bei der Spannung $\sigma_x(t)$ zu ermitteln. Wenn auch hier die Linearität und das Superpositionsgesetz angenommen werden, sind alle Gleichungen (Gleichung 1) bis (9) analog, mit dem einzigen Unterschied, daß statt E hier E/μ steht. Nimmt man das Superpositionsgesetz auch für verschiedenachsige Spannungszustände an, so kann man die allgemeine Beziehung zwischen Spannungen und Formänderungen in der Form

$$\underline{L}_P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_x = \sigma_x - \underline{\mu}_P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) (\sigma_y + \sigma_z) \dots \quad (10a)$$

$$\underline{L}_P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma_{xy} = \tau_{xy} \dots \quad (10b)$$

schreiben, wobei im allgemeinen $\underline{\mu}_P$ und \underline{L}_P Differentialoperatoren in Form von Gleichung (8), jedoch mit anderen Konstanten, bedeuten. Der Isotropie halber sind diese Operatoren entsprechend der Elastizitätstheorie durch die Beziehung $2 \underline{L}_P (1 + \underline{\mu}_P) = \underline{E}_P$ miteinander verbunden.

Im einfachsten Fall der Gleichung 1. Ordnung sind die Operatoren \underline{L}_P und $\underline{\mu}_P/\underline{E}_P$ ebenso wie E_P je mit drei Konstanten zu beschreiben. Annähernd kann man schreiben

$$\tau_P \dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_x = \frac{\tau_P}{E_P} (\dot{\sigma}_x - \mu_P \dot{\sigma}_y - \mu_P \dot{\sigma}_z) + \frac{1}{E_{P\infty}} (\sigma_x - \mu_{P\infty} \sigma_y - \mu_{P\infty} \sigma_z), \quad (11a)$$

$$\tau_P \dot{\gamma}_{xy} + \gamma_{xy} = \frac{\tau_P}{G_P} \dot{\tau}_{xy} + \frac{1}{G_{P\infty}} \tau_{xy} \dots, \quad (11b)$$

wobei näherungsweise dieselbe Retardationszeit τ_P für Schub- und Längsformänderungen vorausgesetzt wird. Es gilt auch hier – der Isotropie wegen – $G_{P\infty} = \frac{1}{2} E_{P\infty} / (1 + \mu_{P\infty})$.

Zur Vereinfachung kann man $\mu_{P\infty} = \mu_P$ annehmen.

Manchmal ist es vorteilhaft, die Deviatorikkomponenten des Spannungs- und Formänderungstensors zu benutzen. Gleichung (10b) bzw. (11b) bleibt dieselbe, aber statt Gleichung (10a) bzw. (11a) muß man die Beziehungen $\sigma_r = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ und $\varepsilon_r = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ einführen. Analog zu Gleichung $\sigma_r = 3 K_P \varepsilon_r$ für nur elastische Formänderungen, wobei K_P

den Volumenmodul bezeichnet, erhält man:

$$3 \underline{K}_P \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_r = \sigma_r. \quad (10c)$$

Hier bedeutet \underline{K}_P wieder einen Operator in Form von (8), wobei wegen der Isotropie $3 \underline{K}_P (1 - 2 \underline{\mu}_P) = \underline{E}_P$ gilt. Für Plaste zeigt sich aber, daß \underline{K}_P vereinfacht werden kann. Näherungsweise kann man nämlich annehmen, daß alle Volumenveränderungen nur elastisch sind. Dann wird $\underline{K}_P = K_P$, woraus für Gleichung (10a) $\underline{\mu}_P = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \mu_P \right) \underline{E}_P / E_P$ folgt. Bei Gleichung (4) 1. Ordnung führt dies zu den Gleichungen in Form von (11a) und (11b), in denen

$$\frac{\mu_{P\infty}}{E_{P\infty}} = \frac{\mu_P}{E_P} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_{P\infty}} - \frac{1}{E_P} \right), \quad \frac{1}{G_{P\infty}} = \frac{1}{G_P} + 3 \left(\frac{1}{E_{P\infty}} - \frac{1}{E_P} \right).$$

Bei weiterer Vereinfachung, d. h. wenn man annimmt, daß das Volumen inkompressibel ist ($\varepsilon_r = \text{konst.}$), kann man weiter $K \rightarrow \infty$, $\mu_P = 0,5$, $3 G_P = E_P$, $\mu_{P\infty} = 0,5$, $3 G_{P\infty} = E_{P\infty}$, einsetzen.

Die allgemeine Lösung unter Berücksichtigung zeitlicher Veränderungen in Konstruktionen bei Annahme der Linearität und des Superpositionsprinzips (lineare Viskoelastizität) wurde schon verhältnismäßig eingehend ausgearbeitet (s. z. B. [2], [3], [5], [9] u. a.). Mit Rücksicht auf die Linearität der Operatoren $\underline{L}_P, \underline{\mu}_P, \underline{G}_P$ kann man sich Gleichungen für jede Aufgabe aus den Gleichungen für die entsprechende elastische Aufgabe ableiten, wenn man die Elastizitätskonstanten E_P, μ_P, G_P durch entsprechende Operatoren $\underline{E}_P, \underline{\mu}_P, \underline{G}_P$ ersetzt. Das am meisten benutzte Lösungsverfahren ist die Laplacesche Transformation, die das Problem in eine elastische Aufgabe überführt. Der Operator (8) wird dabei auf ein entsprechendes Verhältnis $E_P(p)$ von zwei Polynomen des Transformationsparameters p transformiert. Nach Bestimmung der Spannung oder Formänderungen als Funktion von p findet man die Lösung durch Rückwärtstransformation auf Funktion der Zeit t . Leider wird dieses allgemeine Verfahren manchmal zu kompliziert, und es ist deshalb notwendig, vereinfachte Lösungen und numerische Algorithmen, die in der Praxis anwendbar sind, abzuleiten.

3. Ermittlung des Temperatureinflusses

Den Einfluß der Temperatur T auf die Abhängigkeit von Spannungen und Formänderungen kann man für die Beanspruchung bei konstanter Temperatur in der Weise ermitteln, daß man die Materialkonstanten in Gleichung (4), (12) bzw. (7), (10), (11) (sowie die Konstanten von Elementen im Modell) als Funktion von T einführt. Für Gleichung (4), (12) bedeutet das also $E_P = E_P(T)$, $\mu_P = \mu_P(T)$, $E_{P\infty} = E_{P\infty}(T)$, $\tau_P = \tau_P(T)$...

Die Veränderungen der Temperatur durch verlorene Formänderungsarbeit beim Kriechen sind dabei vernachlässigt. Wenn die Temperatur während der Spannungs- und Formänderungsbeanspruchung veränderlich ist ($T = T(t)$), kann man in erster Näherung auch eine einfache Abhängigkeit $E_P = E_P(T)$, ... annehmen, was zu einer linearen Differentialgleichung mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten führt. Es ist jedoch zu bemerken, daß sich in Wirklichkeit in den Konstanten auch ein gewisser Einfluß des ganzen bisherigen Verlaufs von $T(t)$ oder in Differentialform der Ableitungen $\dot{T}(t), \ddot{T}(t), \dots$ zeigt.

Weiterhin zeigt es sich, daß sich für verschiedene konstante Temperaturen die Zeitdiagramme bei gleicher Beanspruchung praktisch ähnlich sind, so als sei der Zeitverlauf beschleunigt. Wenn man also die reduzierte Zeit $t_R = A(T) \cdot t$ anstatt t [9] in allen Gleichungen einführt (analog dem Betonkriechen [1]), in denen $A(T)$ ein Reduktionskoeffizient ist, kann man die Werte $E_P, \mu_P, E_{P\infty}, \tau_P, E_{P\infty}, \dots$ als temperaturunabhängig annehmen. Diese Voraussetzung ist dann auch für eine zeitveränderliche Temperatur $T(t)$ möglich wenn man statt t die reduzierte Zeit

$$t_R = \int_0^t A(T(\tau)) d\tau$$

einführt.

Die Funktion $A(T)$ genügt dann annähernd zur Beschreibung aller Temperatureinflüsse (thermologisch einfaches Material

Sie zeichnet sich bis zu einer gewissen Temperatur T_1 durch langsame Veränderung (um einige Prozente) aus, um dann oberhalb dieser Temperatur schnell abzusinken, so daß die Übergangstemperatur T_1 eine wichtige Materialkonstante bedeutet und in Baukonstruktionen nicht überschritten werden soll.

4. Inhomogene und orthotrope Struktur von GFP - Kurzzeitige Formänderungen

Die Formänderungen von GFP resultieren aus dem Zusammenwirken beider Komponenten - Harz und Glasfasern. Das rheologische Verhalten von Glasfasern ist praktisch genau linear elastisch bis zur Festigkeitsgrenze, das Kriechen annähernd Null. Behandeln wir zuerst die elastischen Formänderungen. Die größten Schwierigkeiten beim GFP bringt die inhomogene und oft anisotrope, meist orthotrope Struktur mit sich, die durch das Glasfasergewebe verursacht wird.

Betrachten wir eine GFP-Platte, die mit einem Gewebe aus Glasfasern in zwei zueinander senkrechten Richtungen x und y verstärkt ist, und leiten wir neue Formeln für die rechnerische Ermittlung ihrer Elastizitätskonstanten mit Rücksicht auf die Querfaserverstärkung ab [1a], [1b]. Wir bezeichnen mit d die Dicke der Platte, mit F_{xS} und F_{yS} die Querschnittsflächen des Glases je Längeneinheit, mit E_P , μ_P , G_P die elastischen Konstanten des Harzes, mit E_S den Elastizitätsmodul der Glasfasern, mit σ_{xS} , σ_{yS} , τ_{xyS} die durchschnittlichen Spannungen in den Glasfasern und mit σ_{xP} , σ_{yP} , τ_{xyP} die durchschnittlichen Spannungen im Harz.

Als der effektive durchschnittliche Querschnitt des Harzes je Längeneinheit erwägen wir die Dicke d_P , die nach dem Volumen des Harzes folgt, d. h., $d_P = d - F_{xS} - F_{yS}$. Bei der Ermittlung des effektiven durchschnittlichen Querschnitts f_{xS} oder f_{yS} von Glas in der Richtung x oder y muß man empirische Koeffizienten α und β einführen, d. h., $f_{xS} = \alpha F_{xS} + \beta F_{yS}$, $f_{yS} = \alpha F_{yS} + \beta F_{xS}$, wobei α die nicht gerade Form (mit Wellen) von Längsfasern und β den Einfluß der Querfasern ermitteln. Weiter setzen wir voraus, daß die Änderungen von σ_x , σ_y , σ_{xS} , σ_{yS} entlang x und y genügend klein sind, so daß ebene Querschnitte angenommen werden können (bei Rändern gilt es nicht). Nimmt man einen ebenen Spannungszustand σ_x , σ_y , τ_{xy} an, so müssen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_x d = \sigma_{xS} f_{xS} + \sigma_{xP} d_P, \quad \sigma_y d = \sigma_{yS} f_{yS} + \sigma_{yP} d_P \quad (12)$$

erfüllt werden. Die elastischen Konstanten der ganzen orthotropen Platte führen wir mit den Beziehungen

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\mu_y}{E_y} \sigma_y, \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\mu_x}{E_x} \sigma_x, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad (13)$$

an, wobei nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit $\mu_y/E_y = \mu_x/E_x$ ist. Die vollständige Adhäsion zwischen Harz und Glasfasern ergibt für die Dehnungen ϵ_x und ϵ_y die Beziehungen

$$\sigma_x \frac{f_{xS}}{E_S} = \frac{\sigma_{xP} - \mu_P \sigma_{yP}}{E_P}, \quad \sigma_y \frac{f_{yS}}{E_S} = \frac{\sigma_{yP} - \mu_P \sigma_{xP}}{E_P} \quad (14)$$

Nenn man aus dem System der 6 Gleichungen (12) und (13) und den ersten zwei Gleichungen (14) die Werte σ_{xS} , σ_{yS} , σ_{xP} , σ_{yP} , σ_x , σ_y , ϵ_x eliminiert, erhält man nach dem Umformen der Gleichungen folgende Ausdrücke für die elastischen Konstanten der Platten:

$$E_x d = E_S f_{xS} + E_P d_P \left[1 - \mu_P^2 \left(1 + \frac{E_P d_P}{E_S f_{yS}} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (15)$$

$$\frac{E_y d}{\mu_x} = \frac{E_P d_P}{\mu_x} \left[\left(1 + \frac{E_S f_{xS}}{E_P d_P} \right) \left(1 + \frac{E_S f_{yS}}{E_P d_P} \right) - \mu_P^2 \frac{E_S^2 f_{xS} f_{yS}}{E_P^2 d_P^2} \right]$$

Hier muß man bemerken, daß für die Berechnung von E_x die Fläche f_{yS} der Querfasern nicht vernachlässigt werden darf. (Der Einfluß von Querfasern auf E_x ist empirisch in [2a] angegeben.) Die Koeffizienten α und β müssen durch Versuche bestimmt werden. Der Koeffizient α für Zug wird einen kleineren Wert als für Druck haben, und E_x wird damit größer für Druck als für Zug sein (wahrscheinlich

$\alpha \approx 0$ für Zug), weil beim Zug infolge der Zugspannungen in der Grenzfläche Harz - Glas große Störungen der Adhäsion an den Querfasern entstehen müssen.

Ähnlich kann man - unter Voraussetzung der gleichmäßigen Schubverformung - $G_{xy} = G_S f_S/d + G_P d_P/d$ erhalten, wobei f_S die effektive von $F_{xS} + F_{yS}$ und $F_{xS} F_{yS}$ abhängige Querschnittsfläche der Glasfasern bedeutet.

Mit Rücksicht auf die o. g. Vereinfachungen sind die Formeln (15) nicht genau. In der Praxis ist es deshalb vorteilhafter, wenn möglich, die 4 Elastizitätskonstanten E_x , E_y , μ_x und G_{xy} durch direkte Messungen zu ermitteln, wobei aber Gleichung (15) für den Ausgleich der Ergebnisse benutzt werden soll.

Nach ähnlichem Verfahren kann man für die Biegebeanspruchung einer GFP-Platte folgende Formeln ableiten:

$$E_x \frac{d^3}{12} = E_S J_{xS} + E_P J_{xP} \left[1 - \mu_P^2 \left(1 + \frac{E_P J_{yP}}{E_S J_{yS}} \right)^{-1} \right]^{-1}$$

$$\frac{E_y d^3}{12 \mu_x} = \frac{E_x d^3}{\mu_x} = \frac{E_P}{\mu_P} \sqrt{J_{xP} J_{yP}} \left[\left(1 + \frac{E_S J_{xS}}{E_P J_{xP}} \right) \left(1 + \frac{E_S J_{yS}}{E_P J_{yP}} \right) - \mu_P^2 \frac{E_S^2 J_{xS} J_{yS}}{E_P^2 J_{xP} J_{yP}} \right] \quad (16)$$

in denen J_{xS} , J_{yS} oder J_{xP} , J_{yP} die Trägheitsmomente des Querschnitts der Glasfasern oder der Platte je Längeneinheit darstellen.

Eine weitere Aufgabe ist die Bestimmung der Formänderungen bei einer Beanspruchung durch σ_x , σ_y , τ_{xy} entlang den Koordinaten x' , y' , die in einem Winkel zu der Glasfaserrichtung x und y stehen. Der Winkel (x , x') wird mit φ bezeichnet. Wenn z. B. die Dehnung ϵ_x' für einachsigen Zug oder Druck σ_x' bestimmt werden soll, findet man zuerst

$$\sigma_x = \sigma_x' \cos^2 \varphi, \quad \sigma_y = \sigma_y' \sin^2 \varphi, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \sigma_x' \sin 2\varphi$$

und die entsprechenden Formänderungen ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} , die nach Gleichung (13) zu berechnen sind. Aus der Transformation der Formänderungskomponenten erhält man dann $\epsilon_x' = \epsilon_x \cos^2 \varphi + \epsilon_y \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\varphi$. Hieraus folgt die bekannte Beziehung [4], [10]

$$\epsilon_x' = \frac{\sigma_x'}{E_x'} = \sigma_x' \left[\frac{\cos^4 \varphi}{E_x} + \frac{\sin^4 \varphi}{E_y} + \frac{\sin^2 2\varphi}{4 F_{xy}} \right] \quad (17a)$$

wobei

$$1/F_{xy} = 1/G_{xy} - 2\mu_x/E_x = 1/G_{xy} - 2\mu_y/E_y$$

In ähnlicher Weise erhält man die entsprechende Querdehnung:

$$\epsilon_y' = \frac{\mu_y}{E_y} \sigma_x' = \epsilon_x' \left[\frac{\mu_x}{E_x} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} - \frac{1}{F_{xy}} \right) \sin^2 2\varphi \right] \quad (17b)$$

Für die Schubspannung τ_{xy}' ($\sigma_x' = \sigma_y' = 0$) gilt:

$$\tau_{xy}' = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}'} = \tau_{xy} \left[\frac{1}{G_{xy}} + \left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} - \frac{1}{F_{xy}} \right) \sin^2 2\varphi \right] \quad (17c)$$

Die Spannung τ_{xy}' bewirkt auch Dehnungen ϵ_x' und ϵ_y' (für $\varphi > 0$), und umgekehrt σ_x' oder σ_y' bewirkt τ_{xy}' .

Die Dehnung ϵ_x bei der Spannung σ_x ist in Faserrichtung bis zum Bruch praktisch genau linear. Für die anderen Beziehungen zwischen Formänderungen und Spannungen gilt die Linearität nur für die Spannungen, die kleiner als ungefähr $0,5 \sigma_{xB}$ bis $0,3 \sigma_{yB}$ sind.

Die Ableitungen von den bekannten Gleichungen (17a), (17b), (17c) wurde hier angedeutet, um zu zeigen, daß sie auch für das nichtlineare Gebiet der Formänderung in Schrägrichtung gültig sind und daß man also die Messungen von den gekrümmten Arbeitsdiagrammen in verschiedenen Schrägrichtungen nach Gleichung (17) ausgleichen sollte [1a], [1b]. (Diese Nichtlinearität wird hauptsächlich dadurch verursacht, daß die Formänderung durch das Harz bedeutend beeinflußt wird, dessen Formänderung bei Zug in diagonalen Richtung zu den Glasfasern oberhalb der Proportionalitätsgrenze hinzukommt: die Bruchdehnung entlang den Fasern beträgt etwa 2%, in Diagonalrichtung 4%.) Für den Fall der Nichtlinearität kann man nämlich die Gleichungen (13) anwenden, wenn die Werte G_{xy} und $\mu_x/E_x = \mu_y/E_y$ von den Spannungskomponenten, näherungs-

weise aber nur von einer Komponente in der Form $G_{xy} = G_{xy}(\tau_{xy})$, $\mu_{xy} = \mu_{xy}(\tau_{xy})$ abhängig angenommen werden. Man kann dann leicht finden, daß die Gleichungen (17a), (17b), (17c) auch dann gelten. Gleichung (17a) ergibt mit dem von der Spannung abhängigen Wert F_x die gekrümmte Spannungs-Dehnungs-Kurve. Wenn F_{xy} näherungsweise nur von τ_{xy} abhängig angenommen wird $F_{xy} = F_{xy}(\tau_{xy})$, dann braucht man nur das Diagramm für $\varphi = 45^\circ$ zu messen, und für alle anderen φ kann man das Diagramm mit Funktion $F_{xy} = F_{xy}(\sigma_x' \frac{1}{2} \sin 2\varphi)$ berechnen.

Das Biegeverhalten einer GFP-Platte kann in ähnlicher Weise ermittelt werden und wird deshalb hier nicht weiter untersucht.

5. Lineares Kriechen von GFP

Auch die langzeitigen Kriechformänderungen kann man rechnerisch durch das Zusammenwirken von Harz und Glas ausdrücken. Der Einfachheit halber untersuchen wir zuerst eine nur in einer Richtung x verstärkte Platte und ermitteln die Beziehung $\sigma_x(t)$ und $\varepsilon_x(t)$. Nach Gleichung (17) und (15) sind die elastischen Formänderungen mit Gleichung ($E_S F_{xS} + E_P F_{xP}$) $\varepsilon_x = E_x d \varepsilon_x = \sigma_x d$ gegeben ($F_{yS} = 0$). Die Differentialgleichung für das Kriechen leitet man ab, indem man E_P durch den Operator \underline{E}_P nach Gleichung (8a) ersetzt, die Gleichung (4) entspricht. So ergibt sich:

$$\left[E_x F_{xS} + \left(1 + \tau_P \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{1}{E_{P\infty}} + \frac{\tau_P}{E_P} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} F_{xP} \right] \varepsilon_x = \sigma_x d.$$

Und nach dem Umformen erhält man [1a], [1b]:

$$\tau_{Rx} \dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_x = \frac{\tau_{Rx}}{E_x} \dot{\sigma}_x + \frac{1}{E_{\infty x}} \sigma_x. \quad (18)$$

wobei

$$E_x d = E_S F_{xS} + E_P F_{xP}, \quad E_{\infty x} = E_S F_{xS} + E_{P\infty} F_{xP}, \quad (19)$$

$$\tau_{Rx} = \frac{E_{P\infty}}{E_P} \frac{E_x}{E_{\infty x}} \tau_P.$$

Für eine Platte, die in zwei Richtungen verstärkt ist, erhält man eine Gleichung höherer Ordnung. Jedoch kann man näherungsweise auch Gleichung (18) annehmen, wobei man die Koeffizienten nach Gleichung (19) oder genauer $E_x d$ nach Gleichung (15) und in analoger Form $E_{\infty x} d$ nehmen kann. Gleichung (18) hat offensichtlich dieselbe Form wie Gleichung (4) (wieder mit dem Modell nach Bild 2a) und wird demzufolge gleichartig behandelt. Für den Verlauf von ε_x bei konstanter Spannung oder von σ_x bei konstanter Dehnung gelten die zu Gleichung (1) und (5) analogen Formeln. Ebenso kann man auch leicht die zu Gleichung (3) und (3a) analogen Gleichungen angeben.

Die Kräfteverteilung zwischen Glas und Harz in der Zeit t ist direkt durch $\varepsilon_x(t)$ und $\sigma_x(t)$ gegeben. Die Spannung im Glas ist

$$\sigma_{xS}(t) = E_S \varepsilon_x(t),$$

im Harz ist sie

$$\sigma_{xP}(t) = [\sigma_x(t) - E_S \varepsilon_x(t)] / F_{xP}$$

(vollkommene Adhäsion vorausgesetzt).

Wie bei den Elastizitätskonstanten kann auch hier Gleichung (19) u. a. nicht als hinreichend genau betrachtet werden. Deshalb ist es besser, Gleichung (18) als Hypothese anzusehen und ihre Konstanten - wenn möglich - direkt durch Messung zu ermitteln.

Mit Rücksicht auf die anisotrope Struktur der GFP gelten in den Richtungen x und y die Gleichungen (18) mit verschiedenen Koeffizienten. Annähernd kann man annehmen, daß die Retardationszeiten für verschiedenachsige Spannungen gleich sind. Dann ergibt sich für den mehrachsigen Spannungszustand [1a], [1b]

$$\tau_{Rx} \dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_x = \tau_{Rx} \left(\frac{\dot{\sigma}_x}{E_x} - \frac{\mu_{xy}}{E_y} \dot{\sigma}_y \right) + \frac{\sigma_x}{E_{\infty x}} - \frac{\mu_{\infty xy}}{E_{\infty y}} \sigma_y, \dots \quad (20a)$$

$$\tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy} + \gamma_{xy} = \frac{\tau_{Ry}}{G_{xy}} \dot{\tau}_{xy} + \frac{\tau_{xy}}{G_{\infty xy}}, \dots \quad (20b)$$

worin τ_{Rx} , $E_{\infty x}$, $E_{\infty y}$, $\mu_{\infty x}$, $G_{\infty xy}$ weitere 4 unabhängige Materialkonstanten bedeuten ($\mu_{\infty y} / E_{\infty y} = \mu_{\infty x} / E_{\infty x}$).

Für ein zu langes Intervall genügen die Gleichungen 1. Ordnung nicht mehr, und man muß Gleichungen höherer Ordnung einführen. Es ist also

$$\varepsilon_x = E_x^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_x - \mu_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) E_y^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_y, \dots \quad (21a)$$

$$\gamma_{xy} = G_{xy}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \tau_{xy}, \dots \quad (21b)$$

E_x , E_y , μ_x und G_{xy} sind hierin 4 unabhängige Differentialoperatoren in Form von Gleichung (8) ($\mu_x / E_x = \mu_y / E_y$). Die Annahme der Inkompressibilität des Volumens bräuchte bei anisotropen Platten keine Vereinfachung. Näherungsweise kann man manchmal $E_{\infty x} / E_{\infty} = E_{\infty y} / E_y$, $\mu_{\infty y} / E_{\infty y} = \mu_y / E_y, \dots$ annehmen. In der Praxis kommt es oft vor, daß $F_{xS} = F_{yS}$, deshalb kann man dann für $E_x = E_y = E$, $\mu_x = \mu_y = \mu$, $E_{\infty x} = E_{\infty y} = E_{\infty}$, $\mu_{\infty x} = \mu_{\infty y} = \mu_{\infty}$ einsetzen (gleichachsige Orthotropie).

Die Formänderungen bei Beanspruchung in Richtungen x' , y' , die einen Winkel zu den Hauptrichtungen der Glasfaserverstärkung bilden, kann man nach Gleichung (21a), (21b) bzw. (20a), (20b) ableiten, wenn in den entsprechenden Elastizitätsgleichungen (20a), (20b), (20c) statt E_x , E_y , G_{xy} , μ_x / E_x der Operator \underline{E}_x, \dots eingesetzt wird. Für die vereinfachten Gleichungen (20a), (20b) 1. Ordnung folgt auf diese Weise bei einachsigen Zug oder Druck σ_x' :

$$\tau_{Rx} \dot{\varepsilon}_x' + \varepsilon_x' = \tau_{Rx} \left[\frac{\cos^4 \varphi}{E_x} + \frac{\sin^4 \varphi}{E_y} + \frac{\sin^2 2\varphi}{4 F_{xy}} \right] \dot{\sigma}_x' \quad (22)$$

$$+ \left[\frac{\cos^4 \varphi}{E_{\infty x}} + \frac{\sin^4 \varphi}{E_{\infty y}} + \frac{\sin^2 2\varphi}{4 F_{xy\infty}} \right] \sigma_x' = \frac{\tau_{Rx}}{E_x} \dot{\sigma}_x' + \frac{\sigma_x'}{E_{\infty x}}$$

Dabei ist $1/F_{xy\infty} = 1/G_{xy\infty} - 2\mu_{x\infty}/E_{x\infty}$. In ähnlicher Weise erhält man die Beziehung für τ_{xy} usw. Die Gültigkeit dieser Gleichungen ist aber wahrscheinlich auf kleine Spannungen im linearen Bereich der Spannungs-Dehnungs-Kurve begrenzt.

Der zweite wichtige Fall der GFP-Platten ist durch isotrope Platten gegeben, die gewöhnlich mit Matten verstärkt sind. Ihre Formänderungseigenschaften sind viel einfacher zu ermitteln als die orthotropen Platten. Eine Untersuchung des Zusammenwirkens von Glas und Harz führt wieder auf Gleichungen der Form von Gleichung (18) bzw. (21), die jedoch isotrop sind. Sie sind also bei $\sigma_x = 0$ identisch mit den Gleichungen, die für Harz - Gleichung (4) bzw. (11a), (11b) - Gültigkeit haben oder allgemein mit (10a), (10b), wobei statt τ_P , E_P , $E_{P\infty}, \dots$ hier τ_R , E , E_{∞} usw. steht. Für die Biegung einer orthotropen oder isotropen GFP-Platte gelten dieselben Beziehungen wie für den ebenen Spannungszustand bei elastischen Formänderungen.

Den Temperatureinfluß kann man wie beim Harz behandeln.

Als einfaches praktisches Beispiel errechnen wir die zeitlichen Umlagerungen der Innenkräfte im Verbundquerschnitt einer geschichteten, in einer Richtung mit einer Biegemoment belasteten Platte. Die Deckschichten sind mit Gewebe, die Innenschichten dagegen mit Matte verstärkt. Die Trägheitsmomente beider Deckschichten bzw. der Innenschicht, bezogen auf den Schwerpunkt des Verbundquerschnitts, bezeichnen wir als J_1 bzw. J_2 , die Materialkonstanten als E_1 , $E_{1\infty}$, τ_{P1} , E_2 , $E_{2\infty}$, τ_{P2} , das Biegemoment in ϕ Deckschichten mit M_1 , in der Innenschicht mit M_2 und ϕ gesamte Biegemoment der Verbundplatte mit $M = M_1 + M_2$. Wir setzen noch voraus, daß die Spannweite genügend groß ist, so daß die Kirchhoffsche Hypothese angenommen werden kann. Aus der Gleichung $M_1/E_1 J_1 = M_2/E_2 J_2$ folgt nach der Elastizitätstheorie dann durch Einsetzen der entsprechenden Operatoren nach Gleichung (18) für E_1 und die Differentialgleichung 2. Ordnung für $M_1(t)$

$$\left(\tau_{P2} \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) \left(\frac{\tau_{P1}}{E_1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{E_{1\infty}} \right) \frac{M_1}{J_1} = \left(\tau_{P2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{E_{2\infty}} \right) \frac{M - M_1}{J_2}$$

Wenn $\tau_{P1} = \tau_{P2} = \tau_P$, gilt vereinfacht

$$\tau_P \left(\frac{1}{E_1 J_1} + \frac{1}{E_2 J_2} \right) \dot{M}_1 + \left(\frac{1}{E_{1\infty} J_1} + \frac{1}{E_{2\infty} J_2} \right) M_1 = \frac{\tau_P}{J_2} \dot{M} + \frac{1}{J_2} M.$$

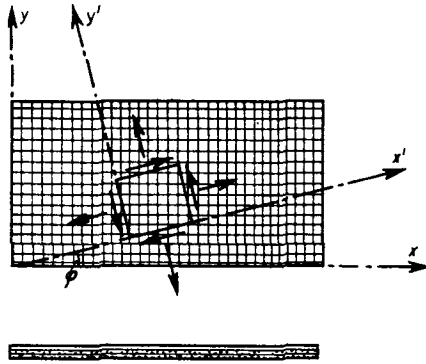
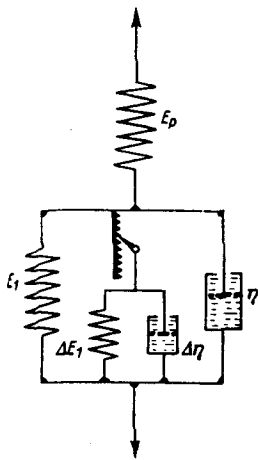


Bild 4

Bild 3

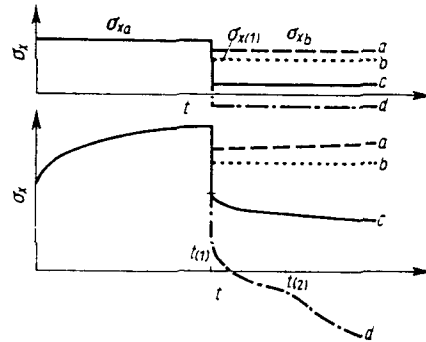


Bild 5

Für $M = \text{konstant}$ und $\forall t \rightarrow \infty$ ist M_1, M_2 einfach durch die Beziehungen $M_1(\infty)/E_{1\infty} J_1 = M_2(\infty)/E_{2\infty} J_2$, $M_1(\infty) + M_2(\infty) = M$ gegeben.

Rechnerisch sollen jetzt die Grenzwerte für eine Verbundplatte ermittelt werden:

$E_1 = 155000 \text{ kp/cm}^2$, $E_2 = 70000 \text{ kp/cm}^2$, $E_{1\infty} = E_1/1,18$, $E_{2\infty} = E_2/1,70$; $J_1 : J_2 = 4^3 : 3^3 = 64 : 27$, $E_1 J_1 / E_2 J_2 = 64 \cdot 155 / 27 \cdot 70 = 5,25$. Dann ist $M_1(0) = 5,25 M / (1 + 5,25) = 0,840 M$, $M_2(0) = 0,160 M$; $E_{1\infty} / J_1 = E_{2\infty} / J_2 = 5,25 \cdot 1,70 / 1,18 = 7,57$, $M_1(\infty) = 7,57 / (1 + 7,57) = 0,883 M$, $M_2(\infty) = 0,117 M$. Die Spannungsveränderung beträgt also $+5,1$ bzw. -27% . Die Sicherheit der unter Druck stehenden Deckschicht gegen Druckbruch (Ausknicken bzw. Delaminierung) wird also verringert.

6. Nichtlinearität der Beziehung der reversiblen und der bleibenden Kriechformänderungen von GFP

Für eine steigende oder wenig sinkende Belastung oder Formänderung (Kriech- und Relaxationskurve insgesamt) scheint die Theorie der linearen Viskoelastizität für GFP verhältnismäßig gut annehmbar. Die größten Abweichungen entstehen bei den Verformungen nach augenblicklicher Entlastung. Nach dem Superpositionsprinzip, unter der Annahme, daß sich die Formänderungen unter Dauerlast einem endlichen Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ nähern, müßten nach der Entlastung für $t \rightarrow \infty$ alle Formänderungen praktisch verschwinden, d. h. bis auf Null zurückgehen (federnde Formänderung); ebenso müßten auch die Spannungen verschwinden, wenn die Formänderung zu Null wird. So ergibt z. B. Gleichung (18) bei $\sigma_x = 0$ für $t > t_1$ und der Anfangsbedingung $\epsilon_x = \epsilon_{x1}$ für $t = t_1$ den Verlauf

$$\epsilon_x(t) = \epsilon_{x1} e^{-\frac{t-t_1}{\tau_{Rx}}} \quad (25)$$

Dies stimmt aber mit den Versuchen nicht überein. Die langzeitigen Formänderungen und Spannungen von GFP sind nur teilweise, ungefähr zu einer Hälfte, reversibel. Die elastischen Formänderungen dagegen gehen ungefähr zu 80 bis 90% zurück. Die lineare Viskoelastizitätstheorie ist hier also nicht gültig, und es entsteht somit die Frage, ob sie überhaupt verwendbar ist. Es ist deshalb notwendig, ein Modell einzuführen, das die Nichtumkehrbarkeit der langzeitigen Formänderungen und Spannungen zum Ausdruck bringt.

Um diese Abhängigkeit einfach zu ermitteln, schlagen wir hier in erster Annäherung für ein begrenztes Intervall das Modell nach Bild 3 vor [1a]. Parallel zum Voigt-Element (Feder und Schnäpper in Parallelschaltung) im Normalmodell nach Bild 2a, das die langzeitigen Formänderungen ergibt, wird ein weiteres mit einem Schnäpper versehenes Voigt-Element geschaltet. Beim Anwachsen der langzeitigen Formänderung ist dieses Element ausgeschaltet, und nur beim Sinken der langzeitigen Formänderung wird es durch den Schnäpper eingeschaltet. Für eine zunehmende oder auch konstante Spannung und für die Relaxation bei konstanter Formänderung gibt dieses Modell denselben Verlauf wie das Normalmodell nach Bild 2a, denn der Schnäpper ist geöffnet. Wenn der Schnäpper eingerastet ist, kann man sich leicht davon überzeugen, daß in diesem Modell beide langzeitigen Federn und beide Dämpfer durch eine Feder

und einen Schnäpper ersetzt werden können, so daß die Beziehung zwischen Spannung und Formänderung wieder die Form von Gleichung (18) hat, jedoch mit anderen Konstanten $E'_{x\infty}$ und τ'_{Rx} ($E'_x \geq E'_{x\infty} \geq E_x$).

Die Konstanten der zusätzlichen Federn und Dämpfer nach Bild 3 sind dann

$$\Delta E_1 = (E'_{x\infty} - E_x)^{-1} - E_{x\infty}^{-1} - (E_x^{-1} - E_x^{-1})^{-1},$$

$$\Delta \eta = \tau'_{Rx} (E'_{x\infty} - E_x)^{-1} - \tau_{Rx} (E_{x\infty}^{-1} - E_x^{-1})^{-1}.$$

Näherungsweise kann man voraussetzen $\tau'_{Rx} \approx \tau_{Rx}$, $\Delta \eta \approx \eta E_1 / (E_x + E_1)$. Die Bedingung für die geöffnete Stellung des Schnäppers lautet $\dot{\epsilon}_x - \dot{\sigma}_x / E_x \geq 0$. Da das Verhalten von Platten auf Zug und Druck ungefähr gleich ist, ist es notwendig, den absoluten Wert, d. h. $|\partial/\partial t (\epsilon_x - \sigma_x / E_x)| \geq 0$, zu nehmen. Das Modell nach Bild 3 stellt selbstverständlich die Formänderungen nur für ein unveränderliches Vorzeichen von $\epsilon_x - \sigma_x / E_x$ dar, d. h. für eine Verlängerung oder eine Verkürzung (im Bild 4 nur für eine Verlängerung). Es hat aber keinen Zweck (obzwar es möglich ist) für beide Fälle gleichzeitig geltendes Modell zu entwickeln.

Beim Aufbringen der ersten Belastung ist immer $(\partial/\partial t) (\epsilon_x - \sigma_x / E_x) \geq 0$, so daß Gleichung (18) gültig ist (geöffneter Schnäpper). Man schreibt dann die Lösung von ϵ_x und σ_x nach Gleichung (18). Wenn die angeführte Ungleichung im Zeitpunkt $t_{(1)}$ mit Werten $\epsilon_{x(1)}, \sigma_{x(1)}$ in eine Gleichung übergeht und vom Zeitpunkt $t_{(1)}$ umgekehrt Ungleichung gilt, ist für $t > t_{(1)}$ folgende Gleichung gültig:

$$\tau'_{Rx} \dot{\epsilon}_x + \epsilon_x - \epsilon_{x(1)} = \frac{\tau'_{Rx} \dot{\sigma}_x + \frac{\sigma_x - \sigma_{x(1)}}{E'_{x\infty}}}{E_x} \quad \text{für } \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x} \right) \leq 0 \quad (26)$$

Die letzte Ungleichung ist auch mit $\epsilon_x \geq \sigma_x / E_x$ und $\epsilon_x \geq \epsilon_{x(1)} + (\sigma_x - \sigma_{x(1)}) / E'_{x\infty}$ oder $\epsilon_x \leq \sigma_x / E_x$ und $\epsilon_x \leq \epsilon_{x(1)} + (\sigma_x - \sigma_{x(1)}) / E'_{x\infty}$ identisch. Wenn sich die Ungleichung (26) im Zeitpunkt $t_{(2)}$ wieder in eine Gleichung ändert und für $t > t_{(2)}$ nicht erfüllt wird, gilt für $t > t_{(2)}$:

$$\tau_{Rx} \dot{\epsilon}_x + \epsilon_x - \epsilon_{x(2)} = \frac{\tau_{Rx} \dot{\sigma}_x + \frac{\sigma_x - \sigma_{x(2)}}{E_{x\infty}}}{E_x} \quad \text{für } \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x} \right) \geq 0. \quad (26a)$$

Als Beispiel errechnen wir den Verlauf von $\epsilon_x(t)$, wenn von $t = 0$ bis $t = t_{(1)}$, $\sigma_x = \sigma_{xa} = \text{konst.} > 0$ [Gleichung (1)] ist und sich im Zeitpunkt t (für $t > t_{(1)}$) die Spannung auf $\sigma_x = \text{konst.}$ ändert (Bild 5). Auf der Grundlage von Gleichung (3) findet man für $t > t_{(1)}$ nach Superpositionsprinzip den Ausdruck

$$\epsilon_x(t) = \frac{\sigma_{xb}}{E_{x\infty}} - \left(\frac{1}{E_{x\infty}} - \frac{1}{E_x} \right) \left[\sigma_{xa} e^{-\frac{t}{\tau_{Rx}}} + (\sigma_{xb} - \sigma_{xa}) e^{-\frac{t-t_{(1)}}{\tau_{Rx}}} \right], \quad (27a)$$

der nur gilt, wenn $\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x} \right) \geq 0$ (a). Daraus entsteht die Bedingung $\sigma_{xb} \geq \sigma_{xa} (1 - e^{-t_{(1)}/\tau_{Rx}}) = \sigma_{x(1)}$. Für $\sigma_{xb} = \sigma_{x(1)}$

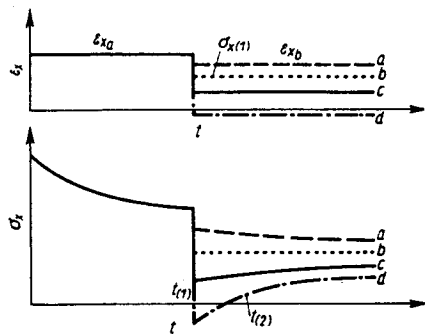


Bild 6

ist $\epsilon_x(t = \epsilon_{x(1)} = \sigma_{x(1)}/E_{x\infty} = \text{konst. b})$. Wenn die Spannung zu stark abnimmt, erhält man für

$$\sigma_{x(1)} > \sigma_{xb} \geq \sigma_{x(1)} (E_{x\infty}^{-1} - E_{x\infty}'^{-1}) (E_{x\infty}'^{-1} - E_x^{-1})^{-1}$$

den Verlauf (c)

$$\epsilon_x(t) = \frac{\sigma_{x(1)}}{E_{x\infty}} - (\sigma_{x(1)} - \sigma_{xb}) \left[\frac{1}{E_{x\infty}'} - \left(\frac{1}{E_{x\infty}'} - \frac{1}{E_x} \right) \right] e^{-\frac{t-t(1)}{\tau_{Rx}}} \quad (27b)$$

Der Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ ist $\epsilon_x(\infty) = \sigma_{x(1)}/E_{x\infty} - (\sigma_{x(1)} - \sigma_{xb})/E_{x\infty}' > \sigma_{xb}/E_{x\infty}'$. Die Formänderung ist also nicht reversibel - federnd - sondern bleibend. Für

$$-\sigma_{x(1)} (E_{x\infty}'^{-1} - E_{x\infty}^{-1}) (E_{x\infty}'^{-1} - E_x^{-1})^{-1} > \sigma_{xb}$$

gilt Gleichung (27b) nur für $t(1) < t \leq t(2)$, wobei $t(2)$ durch die Gleichung

$$(E_{x\infty}'^{-1} - E_x^{-1}) (\sigma_{x(1)} - \sigma_{xb}) \left(1 - e^{-\frac{t(2)-t(1)}{\tau_{Rx}}} \right) = (E_{x\infty}'^{-1} - E_x^{-1}) \epsilon_{x(1)}$$

gegeben ist, während für $t \geq t(2)$ wieder Gleichung (18) gilt (d).

In ähnlicher Weise erhält man die Lösung von $\sigma_x(t)$ für $\epsilon_x = \epsilon_{xa} = \text{konst.} > 0$ bis $t(1)$ und $\epsilon_x = \epsilon_{xb} = \text{konst.} \geq 0$ für $t \geq t(1)$ (Bild 6). Wenn

$$\epsilon_{xb} \geq \epsilon_{xa} \left(1 - e^{-\frac{E_x t(1)}{E_{x\infty} \tau_{Rx}}} \right) = \epsilon_{x(1)}$$

bekommt man nach Superpositionsprinzip (a)

$$\sigma_x(t) = E_{x\infty} \epsilon_{xb} + (E_x - E_{x\infty}) \left[\epsilon_{xa} e^{-\frac{E_x t}{E_{x\infty} \tau_{Rx}}} + (\epsilon_{xb} - \epsilon_{xa}) e^{-\frac{E_x t - t(1)}{E_{x\infty} \tau_{Rx}}} \right] \quad (28a)$$

Bei $\epsilon_{xb} = \epsilon_{x(1)}$ erhält man $\sigma_x = \text{konst. (b)}$ für $t > t(1)$. Für

$$\epsilon_{x(1)} > \epsilon_{xb} \geq -\epsilon_{x(1)} (E_{x\infty}' - E_{x\infty}) / (E_x - E_{x\infty}')$$

findet man (c):

$$\sigma_x(t) = E_{x\infty} \epsilon_{x(1)} - (\epsilon_{x(1)} - \epsilon_{xb}) \left[E_{x\infty}' - (E_x - E_{x\infty}') e^{-\frac{E_x t - t(1)}{E_{x\infty} \tau_{Rx}}} \right] \quad (28b)$$

Offensichtlich ist die Spannung dann nicht reversibel. Wenn die Formänderung in $t(1)$ noch mehr sinkt, gilt (28b) nur bis $t(2)$, wobei

$$(E_x - E_{x\infty}') (\epsilon_{x(1)} - \epsilon_{xb}) \left(1 - e^{-\frac{E_x t(2) - t(1)}{E_{x\infty} \tau_{Rx}}} \right) = (E_x - E_{x\infty}') \epsilon_{x(1)}$$

und weiter $\epsilon_x(t)$ wieder nach Gleichung (18) verläuft (d).

Für den mehrachsigen Spannungszustand sind die Gleichungen (20a), (20b) durch mehrere Ungleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \epsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\mu_{xy}}{E_y} \sigma_y \right| \geq 0, \dots, \frac{\partial}{\partial t} \left| \gamma_{xy} - \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \right| \geq 0 \quad (29)$$

begrenzt. Beim Absinken der Belastung in einer Konstruktion müssen nicht alle Bedingungen gleichzeitig zutreffen. Genaugenommen können Zeitabschnitte auftreten, in denen

z. B. für ϵ_y und γ_{zx} noch Gleichung (20) gilt, während für ϵ_x , γ_{xy} usw. schon die Gleichungen mit geänderten Koeffizienten in Form von Gleichung (26) gelten.

Die mathematische Ermittlung nach dem Modell in Bild 3 gilt nur für ein begrenztes Intervall. Für ein längeres Intervall ist es notwendig, ein aus mehr als drei Elementen bestehendes Modell anzuwenden, das auf eine Gleichung höherer Ordnung führt. Um die Nichtumkehrbarkeit der Formänderungen zu ermitteln, kann man im Modell zusätzliche Federn und Dämpfer mit Hilfe eines oder mehrerer Schnäpper einschalten. Wenn in einfachster Weise für langzeitige Formänderungen nur ein Schnäpper angewendet wird, kann man die Gültigkeit der Gleichung (21) wieder durch die Bedingung $\frac{\partial}{\partial t} \left| \epsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x} \right| \geq 0$ abgrenzen. Wenn im Zeitpunkt $t(1)$ diese Bedingung überschritten wird, muß man die Gleichungen

$$E_x' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) (\epsilon_x - \epsilon_{x(1)}) = \sigma_x - \sigma_{x(1)}, \quad (30a)$$

$$E_x' \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{b_0' + b_1' \frac{\partial}{\partial t} + \dots + b_m' \frac{\partial^m}{\partial t^m}}{a_0' + a_1' \frac{\partial}{\partial t} + \dots + a_n' \frac{\partial^n}{\partial t^n}} \quad (30b)$$

mit anderen Koeffizienten verwenden. Die entsprechende Bedingung ist dann $\frac{\partial}{\partial t} \left| \epsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x} \right| \leq 0$. Wenn auch diese wieder überschritten wird, gilt von neuem Gleichung (21). Die Fälle des mehrachsigen Spannungszustands kann man in ähnlicher Weise ableiten.

Für die Praxis ist jedoch auch hier der bequemste Weg, ein zu langes Intervall auf kürzere zu verteilen, bei denen man in jedem Zeitabschnitt verschiedene Gleichungen in Form von Gleichung (18) und (26) mit dem entsprechenden Modell nach Bild 3 anwendet.

Bemerkung

Die Nichtumkehrbarkeit der Formänderungen konnte man bisher mit Hilfe von im Modell eingeschalteten nichtlinearen Elementen ermitteln, z. B. mit Hilfe von zwei zusammengedrückten Reihplatten oder zwei Stäben mit gegenseitiger, bei einem bestimmten ϵ einrastender Verzahnung. Die einfachsten Fälle einer zunehmenden Spannung oder Formänderung würden dann aber nicht linear sein. Der Vorteil des vom Autor vorgeschlagenen Verfahrens der Einschaltung eines Schnäppers liegt darin, daß die wichtigsten Fälle von Beanspruchungsverläufen linear behandelt werden können. Das Modell nach Bild 3 könnte man auch für reine Plast. erwägen, denn auch ihre Deformation ist nicht völlig reversibel und läuft mit einer anderen Geschwindigkeit, obwohl die Reversibilität viel besser als für GFP ist.

Der Vorteil des vorgeschlagenen Modells liegt vor allem darin, daß die Lösung in gewissen Intervallen linear ist und daß für die Wirkung einer Konstruktion unter ständiger Last meist die gewöhnlich lineare Viskoelastizitätstheorie verwendbar ist. Gleichzeitig gibt es für ihre Anwendbarkeit strenge Grenzen und theoretische Grundlagen für ihre Benutzung.

7. Beziehung zwischen Spannung und Formänderungsverlauf und der Dauerfestigkeit

Die Zeit τ_B , nach der GFP (bzw. Harz) bei konstanter Spannung σ_x zu Bruch geht, hängt von der Spannungsgröße ab, also $\tau_B = \tau_B(\sigma_x)$ [8a]. Die inverse Funktion $\sigma_{xB}(\tau_B)$ stellt die Dauerfestigkeit dar. Um die Lebensdauer I_B bei gegebenem Spannungsverlauf $\sigma_x(t)$ zu errechnen, ist es vorzuziehen, den Begriff der fortschreitenden Schädigung einzuführen. Wir setzen voraus, daß der Schädigungsfortschritt durch eine für jeden augenblicklichen Spannungswert geltende gleiche Funktion $f(t)$ der Zeit t ausgedrückt werden kann, wobei beim Bruch die Summe der zu den einzelnen $f[\tau_B(\sigma_x)]$ bei der Spannung $\sigma_x(t)$ gehörenden und in Zeit t erhaltenen Veränderungen gleich 100% ist. Bezeichnen wir mit $f(t)$ die Schädigungsfunktion, so erhält man die Bruchbedingung

$$\int_{t=0}^{I_B} \frac{df(t)}{f[\tau_B(\sigma_x(t))]} = 1 \quad (31)$$

oder mit den folgenden in Zeitpunkten t_0, t_1, t_2, \dots stufenweise veränderlichen Werten $\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \dots$

$$\sum_{i=1}^{n_B} \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{f(\tau_B(\sigma_{x_i}))} = 1, \quad (30a)$$

nach der es möglich wird, aus den bekannten Funktionen $\tau_B(\sigma_x)$ und $f(t)$ die Lebensdauer t_B vorauszusagen (gewöhnlich nur durch numerische Integration). Für $\sigma_x = \text{konst.}$ erhält man aus (31) $t_B = \tau_B$. Es zeigt sich, daß man für GFP $f(t) = \lg t$ annehmen kann [8a].

Im folgenden sei gezeigt, daß hier vielleicht auch ein anderer ähnlicher Weg gegangen werden kann. Man kann nämlich von der Lebensdauer $\tau_B(\dot{\epsilon}_x)$ bei konstanter Geschwindigkeit $\dot{\epsilon}_x$ ausgehen und analog annehmen

$$\int_{t=0}^{t_B} \frac{df(t)}{f(\tau_B(\dot{\epsilon}_x(t)))} = 1. \quad (32)$$

Diese Beziehung wird für Plaste im Raketenbau [9] benutzt, wobei $f(t) = t^n$, $n = 1$, so daß t_B nicht von der Reihenfolge einzelner Spannungsstufen von gegebener Dauer abhängt.

Es ist wahrscheinlich noch ein dritter Weg möglich. Die Bruchdehnung ϵ_{xB} von GFP-Platten scheint praktisch vom Verlauf $\epsilon_x(t)$ und $\sigma_x(t)$ unabhängig zu sein [6]. Wenn also der Verlauf $\epsilon_x(t)$ beim Kriechen ausgedrückt wird, könnte man die Lebensdauer t_B aus der Gleichung

$$\epsilon_x(t_B) = \epsilon_{xB} \quad (33)$$

errechnen.

Genau betrachtet, ist ϵ_{xB} aber nicht konstant, und es wird also erforderlich, auch den Einfluß der Spannung σ_x und evtl. der Geschwindigkeit $\dot{\epsilon}_x$ zu erwägen. Dann erhält die allgemeine Bedingung die Form

$$F[\epsilon_x(t_B), \dot{\epsilon}_x(t_B), \sigma_x(t_B)] = 0. \quad (34)$$

F bezeichnet eine gewisse Funktion. Am einfachsten wird $F[\epsilon_x, \dot{\epsilon}_x, \sigma_x] = \epsilon_x - C_1 \sigma_x / E_x - C_2$, in der C_1 und C_2 gewisse Materialkonstanten bedeuten.

Für die Ermittlung der Lebensdauer von Konstruktionsteilen wird es also notwendig sein, den durch das Kriechen beeinflussten Spannungs- und Formänderungsverlauf zu bestimmen.

Literatur

- [1a] Bažant, Z. P., Ein neues Modell zur Ermittlung der rheologischen Eigenschaften von glasfaserverstärkten Plasten, Vortrag zur I. Internationalen Tagung über GFP und Epoxydharze, Vorbericht, E. Berlin 1965.
- [1b] Bažant, Z. P., Langzeitige Formänderungen von glasfaserverstärkten Plasten und ihre mathematische Ermittlung, Forschungsbericht des Bauforschungsinstituts der Technischen Hochschule, Prag 1964.
- [1] Bažant, Z. P., Die Berechnung des Kriechens und Schwindens nicht homogener Betonkonstruktionen, V. Kongreß der IVBH in Rio de Janeiro, Vorbericht, Thema V, Zürich 1964, S. 887 bis 898.
- [2] Blund, D. R., The Theory of linear viscoelasticity, Pergamon Press, Oxford 1960.
- [2a] Březina, V., Stabilitätsprobleme von GFP-Elementen, Kaučuk a plastické hmoty, Jg. 1962, Nr. 9.
- [3] Freudenthal, A. M., u. Geiringer, H., The mathematical theories of the inelastic continuum, Handbuch der Physik, Band VI, Springer-Verlag, Berlin 1958.
- [4] Lechnickij, S. G., Anisotrope Platten, Gostechteorizdat, Moskau 1957.
- [5] Nowacki, W., Theorie des Kriechens, Arkady, Warschau 1963.
- [6] Rabinowitsch, A. L., u. Turazian, A. V., Der Einfluß der Deformationsgeschwindigkeit auf die Deformationsgröße bei orthotropen GFP, Доклады Академии Наук СССР [Ber. Akad. Wiss. UdSSR], Jg. 1963, Nr. 6, S. 1350.
- [7] Reiner, H., Rheology, Handbuch der Physik, Band VI, Springer-Verlag, Berlin.
- [8] Skupin, L., Die Rheologie von GFP, Kaučuk a plastické hmoty, Jg. 1962, Nr. 9, S. 30.
- [8a] Skupin, L., Glasfaserverstärkte Kunststoffe II, Forschungsbericht des Bauforschungsinstituts der Technischen Hochschule, Prag 1964.
- [9] Williams, M. L., The structural analysis of viscoelastic materials, AIAA Summer meeting, Los Angeles 1963.
- [10] —, Marine design manual for fiberglass reinforced plastics, McGraw-Hill, New York 1961.

(Eingegangen am 30. Juli 1964.)

PKA 3855