

PIÈCES LONGUES A VOILES ÉPAIS

ET

CALCUL DES POUTRES A SECTION DÉFORMABLE

par Z. P. BAŽANT, CSc., doc. habil.,
Ingénieur de recherche à l'Institut de Construction à l'École polytechnique de Prague.

Texte adapté par M. THENOZ,
Ingénieur des Ponts et Chaussées

RÉSUMÉ

Le problème étudié est celui des poutres profilées lorsque la section transversale est déformable, ce qui est notamment le cas des poutres à profil ouvert sans raidisseurs.

La méthode utilisée découle du principe du minimum de l'énergie potentielle élastique, méthode applicable en particulier lorsque la déformation est exprimée sous la forme d'une combinaison linéaire d'un certain nombre de composantes fondamentales. Le problème est ainsi ramené à la résolution d'un système d'équations différentielles linéaires.

La méthode est d'abord appliquée aux pièces rectilignes à profil fermé, puis aux pièces rectilignes à profil ouvert et enfin aux pièces courbes; la section peut être constante ou variable.

SUMMARY

Elongated structural shapes with thick diaphragms. Design calculations for deformable-section beams.

The problem dealt with herein is that of shaped beams whose cross-section is deformable, this referring more especially to open-section beams without web stiffeners.

The method instanced stems from the principle of minimum potential energy of deformation, and is particularly applicable when expressed under the forms of a linear arrangement of a number of basic components, the problem then merely consisting in solving a system of linear differential equations.

The method is first applied to closed-section straight structural shapes, then to those with open sections, and finally to cambered shapes, the cross-section being either constant or variable.

INTRODUCTION

Les poutres des ponts en béton ont d'habitude un nombre insuffisant d'entretoises; il faut alors tenir compte non seulement de la torsion gênée avec gauchissement des sections, mais aussi des déformations transversales de la section auxquelles le voile relativement épais résiste essentiellement par des moments de flexion, et aussi, dans le cas de profils ouverts, par des moments de torsion dans le voile. La solution n'est connue que pour les poutres à profil fermé de section constante et d'axe rectiligne [2]. De plus, il faut considérer la variation de la section; le problème n'était résolu que dans le cas de la section rigide [5].

Dans cet article, une solution générale est présentée pour les poutres à profil ouvert et fermé, de section variable et à courbure transversale.

Partant du principe du minimum de l'énergie potentielle élastique, on utilise la méthode variationnelle directe. La base est constituée par les expressions (6) des déformations relatives longitudinales ϵ et des angles de cisaillement γ , dont les composantes fondamentales sont choisies identiques à celle des pièces de section constante; dans ce dernier cas, elles découlent des composantes fondamentales des déplacements longitudinaux u et transversaux v (fig. 3). Ainsi le problème est réduit à un système (9) d'équations différentielles ordinaires linéaires, du second ordre à coefficients variables, les inconnues étant les paramètres par lesquels il faut multiplier les « composantes fondamentales des déformations » pour obtenir les déformations réelles. A la différence des pièces droites à section constante, ces équations sont simultanées et l'orthogonalisation de leurs coefficients est en général impossible. Par exemple, pour une pièce à section monosymétrique fermée de hauteur variable (fig. 5) on ne peut séparer les équations relatives à la flexion horizontale, à la torsion gênée et à la distorsion de la section.

Pour le calcul, on considère les poutres de ponts comme des pièces longues formées de voiles minces, où il faut tenir compte de la torsion gênée avec gauchissement des sections (une section droite ne reste pas plane). Cependant, pour la plupart des ponts en béton et certains ponts en acier, cette théorie s'est révélée insuffisante.

En effet, pour des raisons technologiques (et quelquefois aussi celles de transport) on ne peut pas réaliser dans une poutre un nombre suffisant d'entretoises; une considérable déformation de la section transversale peut alors se produire. Ceci a été confirmé récemment par plusieurs mesures sur modèle (en Tchécoslovaquie : le modèle du pont courbe sur Jizera à Kořenov (1)).

En section transversale, le voile résiste à la déformation non seulement par cisaillement supposé également réparti dans son épaisseur mais encore par sa rigidité à la flexion transversale; c'est-à-dire que la section transversale se comporte comme un portique élastique et subit des déformations. Pour souligner la différence des poutres à voile mince pour lesquelles la rigidité à la flexion du voile lui-même est négligeable, nous pouvons parler des poutres à voile épais (bien qu'elles ressemblent aux poutres à voile mince par le fait qu'elles consistent toujours en un voile assimilé à un élément bidimensionnel).

La théorie des pièces à section fermée sujette à distorsion était jusqu'à présent développée seulement pour les pièces droites à section constante [1] et formulée le plus correctement et en les termes les plus généraux par Vlasov [2].

Sa théorie a été utilisée avec succès par Michálek et Březina [3] pour le calcul du pont sur la vallée de Nusle à Prague, pont de hauteur constante (un métro passe à l'intérieur du caisson). Cependant, pour la plupart des ponts, la hauteur de la section, ou au moins l'épaisseur des parois est variable et, de plus, le cas des pièces courbes en plan est très important. La solution relative aux pièces longues à parois minces, droites ou courbes, à profil ouvert ou fermé, de section variable a été présentée par l'auteur dans le cas de la section transversale rigide [4] [5]. Le cas d'une pièce de section variable et déformable, ainsi que le cas d'une pièce courbe à section déformable demeurent, d'après les connaissances de l'auteur, irrésolus.

Le calcul des poutres à profil ouvert et déformable est encore plus compliqué et on ne dispose à présent d'aucune théorie générale, pas même pour les poutres à section constante, sauf quelques solutions fort simplifiées.

(1) Rapport tchécoslovaque pour le 5^e Congrès de la F.I.P. à Paris, juin 1966 dans *Inženýrské stavby* 1966, n° 5 Prague.
[1] Voir bibliographie en fin d'article.

Le cas des pièces courbes n'était point encore traité. La solution de ces problèmes sera l'objet de notre étude. En même temps nous essaierons de tenir compte des composantes d'ordre encore plus élevé de la déformation de la section telles que la variation non linéaire des flèches entre les différentes âmes (action semblable à celle des poutres croisées), le gauchissement des âmes et des hourdis eux-mêmes, et aussi la distribution non uniforme du cisaillement dans les âmes et les hourdis; le terme correspondant à cette dernière composante devient important pour une poutre de section trop large ou trop haute par rapport à la longueur de la poutre (entre 1/5 et 1/10), ce qui est justement un cas fréquent dans les ponts; ce terme est également important dans l'étude de la répartition des efforts à proximité de l'ancrage des câbles de précontrainte.

I. Les hypothèses.

Avant tout nous introduisons les mêmes hypothèses que pour les pièces à section rigide constante [2], [4], [5], c'est-à-dire : pièce suffisamment longue et à rayon de courbure suffisamment grand par rapport aux dimensions du profil et celles-ci suffisamment grandes par rapport à l'épaisseur des parois, contraintes normales transversales négligeables; plus loin, matériau élastique linéaire, déformations petites.

Dans le cas de section variable, nous supposons que la variation est continue et suffisamment lente le long de la pièce.

Ultérieurement nous ferons des hypothèses auxiliaires sur les composantes fondamentales des déplacements ou des déformations dans la section. Mais ces dernières hypothèses n'expriment rien d'autre que le choix des premiers termes dans la méthode variationnelle de Ritz.

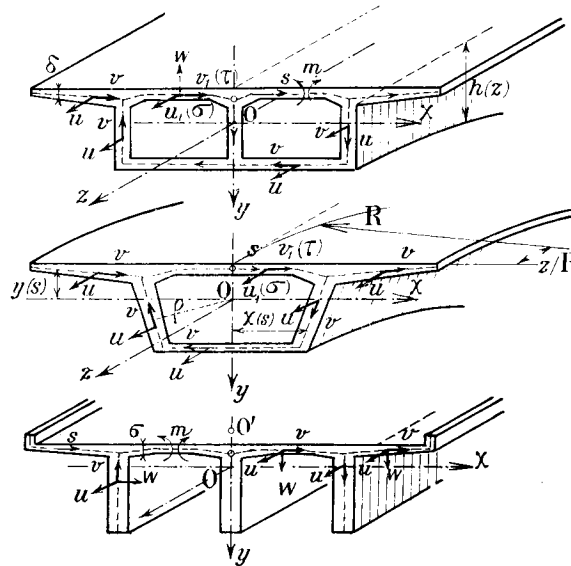


Fig. 1

II. La méthode variationnelle directe.

Les hypothèses sur la déformation de la section sont à la base de la méthode variationnelle de Kantorovich, une modification de la méthode de Ritz [6], qui permet de réduire le problème initial d'élasticité tridimensionnelle ou le problème bidimensionnel de la théorie des coques épaisses, à un problème unidimensionnel comportant un système d'équations différentielles ordinaires. Le problème est donc mathématiquement défini, si l'on connaît l'expression de l'énergie potentielle π de la pièce. Celle-ci est une fonctionnelle des fonctions $u(s, z)$ et $v(s, z)$: $\pi = \pi(u, v)$;

s et z coordonnées d'un point de la surface moyenne du voile;
 z coordonnée de la longueur de l'axe de la pièce;
 s abscisse curviligne prise le long de la ligne moyenne de la section transversale de la pièce;
 u déplacement longitudinal dans la direction de z ;
 v déplacement transversal dans la direction de s .

Pour l'application de la méthode de Ritz, nous écrivons (ainsi que Vlasov [2]) :

$$(1) \quad u = \sum_{i=1}^m U_i(z) \varphi_i(s) \quad v = \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k(s)$$

Les fonctions $\varphi_1(s), \varphi_2(s) \dots, \psi_1(s), \psi_2(s) \dots$, sont les composantes fondamentales indépendantes choisies (que l'on peut aussi appeler les « coordonnées généralisées ») qui décrivent la variation de u et v dans la section.

$U_1, U_2 \dots V_1, V_2$ les paramètres correspondants relatifs aux déplacements longitudinaux et transversaux.

Nous aurions dû aussi introduire une expression semblable pour le déplacement w , perpendiculaire au voile. Mais nous ne devons pas le considérer si nous réduisons toutes les charges aux charges tangentielles au voile comme il est indiqué figure 2.

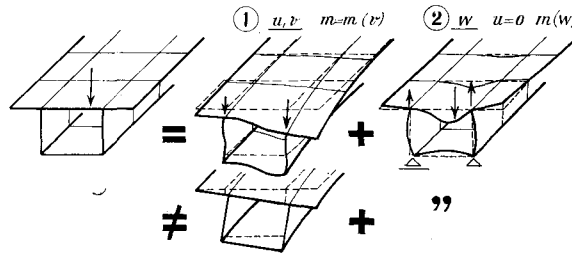


Fig. 2

Pour la « déformation locale », c'est-à-dire le cas 2 de la figure 2, on peut considérer, d'après le principe de Saint-Venant, que la flèche des âmes est nulle. Les méthodes de calcul pratiques sont en général satisfaisantes (on calcule hourdis supérieur, âmes, hourdis inférieur comme un portique avec une certaine largeur de répartition) et, nous ne traiterons pas ce problème ici. Les charges tangentielles produisent une « déformation d'ensemble », cas 1 de la figure 2, qui fera seul l'objet de notre étude.

Cette décomposition des charges amène la simplification suivante : dans le cas de charges seulement tangentielles au voile les moments fléchissants transversaux dans le voile $m(s)$, moments qui agissent sur une coupure faite le long de la ligne coordonnée $s = \text{constante}$ (dans la section de la pièce), sont entièrement déterminés par les déplacements transversaux v ou encore par les paramètres V_k (on suppose la ligne moyenne s inextensible).

On peut alors écrire :

$$(2) \quad m = \sum_{k=1}^n V_k(z) m_k(s)$$

$m_k(s)$ étant les moments fléchissants transversaux dans le voile, qui correspondent aux déplacements tangentiels $v = \psi_k(s)$. On peut les déterminer par le calcul d'un portique élastique formé par l'élément dz de la pièce.

Pour être rigoureux, nous devons remarquer que se produisent également dans le voile épais des moments de torsion m_{sz} et des moments de flexion longitudinale m_z . Les moments longitudinaux m_z (pro-

portionnels à V_1'' , V_2'' , V_3'' , etc.) sont négligeables par rapport aux moments de flexion totaux. Dans une section à profil fermé, ceci est également valable pour les moments de torsion m_{sz} . Mais dans une section à profil ouvert nous devons les considérer.

III. Composantes fondamentales des déplacements dans les profils fermés.

Discutons maintenant le choix des systèmes de fonctions $\varphi_i(s)$ et $\psi_i(s)$. Le plus correct mathématiquement serait de partir d'une condition de choix optimale de telle sorte que la solution obtenue avec un nombre limité de termes soit la plus exacte possible. Mais comme cela serait extrêmement difficile, nous devons nous appuyer sur l'expérience et l'intuition, suivant la voie tracée par Vlasov [2].

Nous choisirons les fonctions $\varphi_i(s)$ et $\psi_i(s)$ comme il est indiqué pour un caisson double à la figure 3.

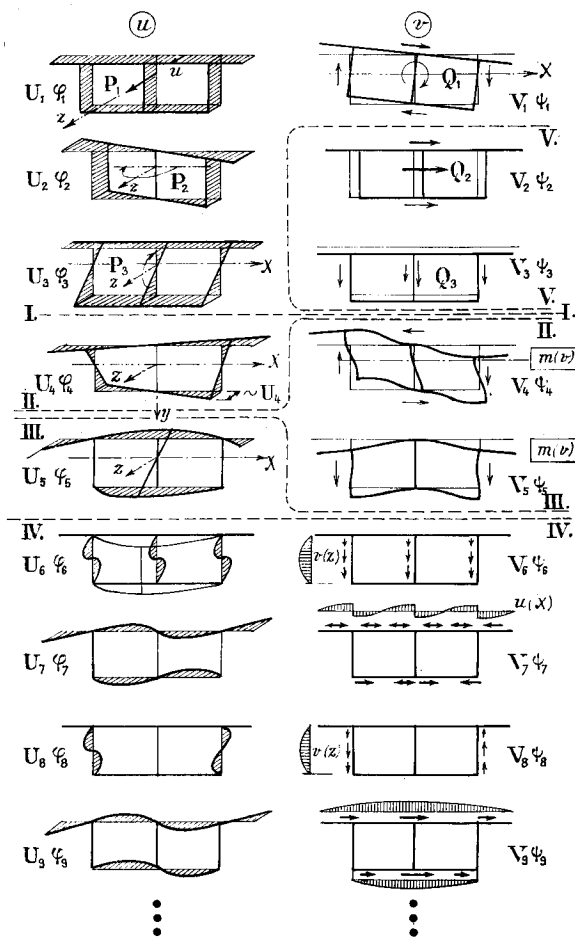


Fig. 3

Les trois premières fonctions sont indiscutables; elles correspondent à la section plane et rigide. Elles sont :

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \varphi_1(s) = 1 & \varphi_2(s) = x(s) & \varphi_3(s) = y(s) \\
 & \psi_1(s) = \rho(s) & \psi_2(s) = \frac{dx(s)}{ds} & \psi_3(s) = \frac{dy(s)}{ds}
 \end{aligned}$$

x, y coordonnées horizontale et verticale d'un point de la section.
 ρ la distance entre la tangente à la ligne moyenne du profilé et l'axe z .
 Avec ce choix là les paramètres ont les significations suivantes :
 U_1 déplacement longitudinal de la section;
 U_2, U_3 rotation autour des axes y et x ;
 V_1 rotation transversale (autour de oz);
 V_2, V_3 déplacements transversaux (flèches) dans le sens des x et des y .

Pour $V_2 = U_2, V_3 = -U_3$ la section reste perpendiculaire à l'axe neutre (hypothèse de Navie Bernouilli). On a aussi :

$$m_1(s) = m_2(s) = m_3(s) = 0.$$

Toute les fonctions suivantes représentent la déformation de la section. Pour les pièces formées de voiles c'est avant tout le gauchissement (une section droite ne reste pas plane) que l'on peut exprimer, pour les caissons rectangulaires, par :

$$(4a) \quad \varphi_4(s) = x(s) \cdot y(s).$$

Pour les profilés de forme très différente du rectangle (ou pour les profilés rectangulaires à épaisseur très variable) on peut déterminer la fonction φ_4 convenable comme le gauchissement qui correspond à la torsion simple (de Bredt) [5].

Avec la fonction ψ_4 nous introduisons la *distorsion du caisson* que l'on peut exprimer pour un caisson rectangulaire par :

$$(4b) \quad \psi_4(s) = \frac{dx(s)}{ds} y(s) + x(s) \frac{dy(s)}{ds}$$

Pour un caisson double, il faut introduire le déplacement mutuel des âmes extérieures par rapport à l'âme moyenne (déformation comme chez les poutres croisées). Pour un caisson rectangulaire on peut écrire d'après la figure 3 :

$$(5) \quad \psi_5(s) = x^2(s) \frac{dy(s)}{ds}$$

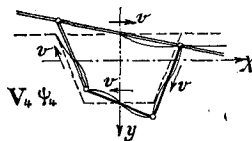


Fig. 4

Pour un caisson de forme quelconque, simple ou multiple qui consiste en hourdis et âmes droites, on peut construire les fonctions $\varphi_4, \psi_4, \psi_5$ (et éventuellement encore d'autres pour un triple caisson, etc.), en supposant que les âmes et les hourdis sont reliés par des articulations (en détail voir [2]), ainsi qu'il est schématisé pour φ_4 à la figure 4 (parce qu'en section transversale le voile peut être considéré comme inextensible).

Les moments fléchissants transversaux $m_4(s), m_5(s)$ dans le voile se calculent ensuite comme dans un portique élastique à partir des déplacements donnés des angles [2]. Pour un caisson simple rectangulaire, doublement symétrique, on obtient par exemple (pour $\psi_4 = \pm 1$ aux angles) $m_4 = \pm E \left(\frac{d_1}{\delta_1^3} + \frac{d_2}{\delta_2^3} \right)^{-1}$ dans les angles; où d_1 et d_2 sont la hauteur et la largeur du rectangle, et δ_1 et δ_2 les épaisseurs de la paroi (constantes). Entre les angles la variation de m_4 est linéaire.

A la figure 3 nous avons illustré un choix convenable des fonctions représentant les composantes d'ordre encore plus élevé nécessaires au calcul d'une poutre trop courte ou bien à section trop haute ou trop large. On sait que dans ce cas l'hypothèse de la conservation des sections planes n'est plus admissible, même pas pour la flexion (il en est de même pour l'étude de la répartition des efforts à proximité de l'ancrage des câbles de précontrainte). Alors la fonction φ_5 à la figure 3 exprime le gauchissement différent des caissons individuels; les fonctions $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$, etc., les gauchissements dans chaque âme ou hourdis particulier. Les fonctions ψ_6, ψ_7, ψ_8 permettraient de satisfaire à la répartition non uniforme des contraintes de cisaillement dues à la flexion dans chaque âme ou hourdis particulier, etc.

IV. Les pièces droites à profil fermé.

Considérons d'abord le cas de la section constante. Des équations (1) découlent les déformations relatives normales longitudinales $\epsilon = \frac{du}{dz}$ et les angles de cisaillement $\gamma = \frac{du}{ds} + \frac{dv}{dz}$ dans la surface moyenne du voile.

$$(6) \quad \begin{aligned} \epsilon &= \sum_{i=1}^m U_i'(z) \varphi_i(s) \\ \gamma &= \sum_{i=1}^m U_i'(z) \frac{d\varphi_i(s)}{ds} + \sum_{k=1}^n V_k'(z) \psi_k(s) \end{aligned}$$

où $()' = \frac{d}{dz}$.

Si l'on avait introduit les expressions (1) pour les pièces à section variable on devrait ajouter dans (6) les termes $U_i \frac{d\varphi_i}{dz}$ etc., puisque les dérivés $\frac{d\varphi_i}{dz}$ et $\frac{d\psi_k}{dz}$ (par exemple $\frac{dy}{dz}$) le long des fibres longitudinales données par $s = \text{constante}$ ne sont plus nulles. Il serait donc assez incommode de mettre les expressions (1) à la base de la méthode variationnelle.

Cependant, si l'on néglige, comme dans la théorie classique de la flexion, le rôle de l'extension transversale ϵ_s dans la surface moyenne du voile ($\epsilon_s = 0$), au lieu de $\pi = \pi(u, v)$ on peut également considérer que l'énergie potentielle est déterminée par les deux fonctions $\epsilon(z, s)$, $\gamma(z, s)$ c'est-à-dire $\pi = \pi(\epsilon, \gamma)$ ϵ et γ étant deux fonctions mutuellement indépendantes.

De ce point de vue, on peut donc aussi bien introduire directement, au lieu de (1) les expressions de $\epsilon(z, s)$ et $\gamma(z, s)$ du type :

$$\epsilon = \sum_r f_r(z) \epsilon_r(z) \qquad \gamma = \sum_r g_r(z) \gamma_r(s)$$

Il sera plus pratique d'introduire ces relations sous la forme (6), c'est-à-dire de supposer que les composantes fondamentales de ϵ et de γ dans la section sont semblables (proportionnelles) à celles retenues pour les pièces à section constante.

Il faut remarquer que cette dernière hypothèse implique une distribution des déplacements u et v non semblable à la distribution correspondant à la section constante; c'est-à-dire que les équations (1) deviennent auxiliaires, valables seulement en première approximation. La signification des U_i et V_k comme paramètre des déformations (voir fig. 3 à 7) devient alors seulement approximative. Nous devons souligner qu'en conséquence les conditions aux limites correspondant à des déplacements donnés, tels que l'encastrement (ou l'appui élastique) ne peuvent être formulées qu'approximativement, dans le cas de section faiblement variable.

Mais il faut noter que cette hypothèse est aussi nécessaire pour établir la théorie classique de la flexion des pièces à voile mince et à section variable; si on ne l'admettait pas, l'équation habituelle $(EI\gamma w)'' = q_y$ ne serait plus valable comme première approximation. Pour le calcul de la flexion des ponts selon figure 1, on conserve toujours l'hypothèse de la distribution plane des contraintes normales, mais alors la distribution correspondante des déplacements longitudinaux n'est plus plane.

L'énergie potentielle totale s'exprime par :

$$(7) \quad \pi = \int_z \int_F \left(\frac{1}{2} E \epsilon^2 + \frac{1}{2} G \gamma^2 \right) dF dz + \int_z \int_s \frac{m^2}{2EI_s} ds dz - \int_z \int_s (pu + qy) ds dz$$

F surface de la section,
 $dF = \delta ds$.

$I_s = \frac{1}{12} \delta^3$ moment d'inertie transversal du voile par unité de longueur.

p, q charges réparties par unité de surface du voile longitudinal (parallèle à Oz) ou transversale tangente. E, G , modules d'élasticité normale et de cisaillement.

Les charges concentrées sont un cas limite des charges p et q , il est donc inutile de les écrire. Dans le cas d'appuis élastiques, il faudrait encore ajouter les termes correspondants.

Nous portons maintenant les expressions (6), (2) et (1) dans (7) et écrivons la première variation $\delta\pi$, alternant l'ordre d'intégration et de variation de même que l'ordre de variation et de dérivation; nous obtenons :

$$(8) \quad \begin{aligned} \delta\pi = & \int_{(z)} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \left\{ \int_{(v)} E \sum_{j=1}^m U_j \varphi_j \varphi_i (\delta U_i)' dF \right. \\ & + \int_{(v)} G \left(\sum_{\gamma=1}^m U_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial s} + \sum_{i=1}^n V_i \psi_i \right) \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \delta U_i + \psi_k (\delta V_k)' \right] dF \\ & \left. + \int_{(s)} \frac{m_k}{EI_s} \sum_{l=1}^n V_l m_l \delta V_k ds - \int_{(s)} (p \varphi_i \delta U_i + q \psi_k \delta V_k) ds \right\} dz \end{aligned}$$

Les intégrales ci-dessus contiennent les dérivées $(\delta U_i)'$, $(\delta V_k)'$; en intégrant par partie, nous obtenons une expression contenant seulement les δV_i et δV_k . Pour que π soit minimal (c'est-à-dire que $\delta\pi$ soit nulle, il faut que les coefficients de $\delta U_1, \delta U_2, \dots, \delta V_1, \delta V_2, \dots$, soient tous nuls. Il en résulte les équations d'équilibre exprimées en fonction des déformations :

$$(9) \quad \begin{aligned} & - \sum_{j=1}^m (E a_{ij} U_j)' + \sum_{j=1}^m G b_{ij} U_j + \sum_{l=1}^n G c_{il} V_l = p_i \quad (i=1, \dots, m) \\ & - \sum_{j=1}^m (G c_{jk} U_j)' - \sum_{l=1}^n (G r_{kl} V_l)' + \sum_{l=1}^n E s_{kl} V_l = q_k \quad (k=1, \dots, n) \end{aligned}$$

avec les conditions aux extrémités de la pièce que nous n'écrivons pas parce qu'elles découlent facilement du principe des travaux virtuels. Dans ces équations nous avons introduit les notations :

$$(10) \quad p_i = \int_{(s)} p \varphi_i ds \quad q_k = \int_{(s)} q \psi_k ds$$

relativement aux composantes de charge et les notations :

$$(11) \quad \begin{aligned} a_{ij} &= \int_{(v)} \varphi_i \varphi_j dF, \quad b_{ij} = \int_{(v)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial s} dF, \quad c_{ik} = \int_{(v)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} \psi_k dF \\ r_{kl} &= \int_{(v)} \psi_k \psi_l dF, \quad s_{kl} = \frac{1}{E} \int_{(s)} \frac{m_k m_l}{EI_s} ds \end{aligned}$$

relativement aux caractéristiques de forme de la section.

Celles-ci, après multiplication par les modules de déformation, représentent les rigidités correspondant aux différentes composantes fondamentales des déformations d'après la figure 3 : elles varient avec la section $a_{ij} = a_{ij}(x)$, etc.

Les équations (9) représentent un système de $m+n$ équations différentielles ordinaires linéaires du second ordre, à coefficients variables. Dans le cas particulier de la section constante, elles sont identiques aux équations générales de Vlasov ([2], équation IV-1-14) à coefficients constants déduits du principe des travaux virtuels.

La méthode de résolution (numérique) est bien connue, mais, dans le cas général, les calculs manuels correspondants sont beaucoup trop longs. Cependant, avec l'utilisation d'ordinateurs, leur résolution (même dans le cas $m = 5$, $n = 5$) ne pose pas de problèmes.

REMARQUES SUR LES CARACTÉRISTIQUES DE LA SECTION FERMÉE

Ayant choisi les fonctions φ_i et ψ_k sous la forme (3) d'après la figure 3, les caractéristiques $a_{11} = F$, $a_{22} = I_y$, $a_{33} = I_x$ représentent la surface de la section et les moments d'inertie autour des axes y et x ; $a_{23} = I_{xy}$, le produit d'inertie; $r_{11} = I_p$ le moment d'inertie tangent polaire; $a_{12} = S_y$ et $a_{13} = S_x$ sont les moments statiques autour des axes y et x :

- p_1 charge totale longitudinale dans la section;
- q_2, q_3 charges transversales horizontale et verticale;
- p_2, p_3 moment longitudinal des charges (autour des axes Oy et Ox);
- q_1 moment transversal des charges (autour de l'axe Oz).

Pour un rectangle, en particulier :

$$b_{22} = c_{22} = r_{22} \quad \text{et} \quad b_{33} = c_{33} = r_{33}$$

représentent la somme des surfaces des deux âmes et hourdis opposés; de plus :

$$b_{11} = b_{12} = b_{13} = c_{12} = c_{13} = b_{23} = c_{23} = r_{23} = 0, \text{ etc.}$$

Pour simplifier les calculs, il y a lieu d'introduire des fonctions φ_i et ψ_k orthogonales afin d'annuler les coefficients a_{ij} et r_{kl} pour $i \neq j$ (ou $k \neq l$). L'orthogonalisation est plus facile si la section est symétrique. (Les charges, cas 1 de la fig. 2, se décomposent en charges symétriques et antisymétriques.) Les trois premières fonctions sont orthogonales pour une certaine position des axes Ox et Oy (fig. 3).

Cependant, si la section est variable, on ne peut plus, sauf cas particuliers, introduire un axe rectiligne Oz de telle façon que les fonctions φ_i et ψ_k soient orthogonales dans plusieurs sections à la fois. Mais, dans les cas fréquents de section monosymétrique (fig. 1 à 4) une orthogonalisation au moins partielle peut être atteinte (si la pièce n'est pas courbe).

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{34} &= 0 \\ b_{1j} = b_{23} = b_{34} &= 0 \\ c_{1j} = c_{23} = c_{24} &= 0 \\ r_{12} = r_{13} = r_{23} = r_{14} = r_{24} = r_{34} = r_{15} = r_{25} = r_{45} &= 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Si Ox est l'axe principal d'inertie $a_{13} = 0$. Les équations pour les charges symétriques et antisymétriques se séparent.

Pour l'étude de la flexion des poutres suffisamment longues (élancement inférieur à 1 : 10) les déformations de cisaillement peuvent être négligées.

En considérant $G \rightarrow \infty$ ($b_{22} = -c_{22}$, $b_{33} = c_{33}$) les équations pour $i = 2$ et $i = 3$ se réduisent alors aux relations purement géométriques :

$$U_2 = V_2, \quad U_3 = -V_3$$

Mais il est impossible de négliger le cisaillement dû à la flexion si l'on considère des flèches différentes dans les âmes (U_5 et V_5 à la fig. 3).

Explicitons les équations simultanées pour un caisson simple monosymétrique, tenant compte des composantes φ_1 à φ_4 et ψ_1 à ψ_4 (fig. 5). Les équations relatives à l'effort normal ($i = 1$), à la flexion et au cisaillement verticaux ($i = k = 3$) se séparent, tandis que les équations relatives à la torsion ($k = 1$) et au gauchissement ($i = 4$) sont liées aux équations relatives à la flexion horizontale ($i = k = 2$) et à la distorsion

de la section ($k = 4$). Si l'on néglige les déformations de cisaillement dues à la flexion horizontale, on obtient comme première approximation le système suivant :

$$(12) \quad \begin{aligned} &-(Ea_{22}U_2)' - (Ea_{24}U_4)' + Gb_{22}U_2 + Gb_{24}U_4 + Gc_{21}V_1 + Gc_{24}V_4 = p_2 \\ &-(Ea_{42}U_2)' - (Ea_{44}U_4)' + Gb_{42}U_2 + Gb_{44}U_4 + Gc_{41}V_1 + Gc_{44}V_4 = p_4 \\ &-(Gc_{21}U_2)' - (Gc_{41}U_4)' - (Gr_{11}V_1)' - (Gr_{14}V_4)' + Es_{11}V_1 + Es_{14}V_4 = q_1 \\ &-(Gc_{24}U_2)' - (Gc_{44}U_4)' - (Gr_{14}V_1)' - (Gr_{44}V_4)' + Es_{41}V_1 + Es_{44}V_4 = q_4 \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour un caisson double (V. fig 3) nous devons ajouter au moins une cinquième équation simultanée ($k = 5$) pour la distribution non linéaire des flèches dans les âmes et dans les équations (12) ajouter les termes en V_5 .

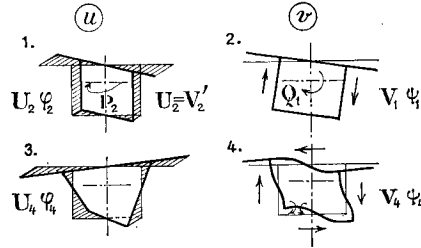


Fig. 5

V. Les pièces droites à profil ouvert.

Pour les pièces à profil ouvert sans entretoise les déformations des sections sont encore plus importantes et en même temps plus difficiles à incorporer dans les calculs. Cela tient au fait que l'on a une plus grande diversité des déformations des sections.

De plus, on ne peut plus négliger dans les sections à profil ouvert les moments de torsion m_{sz} dans le voile qui proviennent de la distribution non-uniforme mais triangulaire des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur du voile (ou bien de la distribution des déplacements tangentiels v dans l'épaisseur du voile).

La déformation de cisaillement du voile est donnée par $(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z})$ mais puisque $\frac{\partial u}{\partial s}$ est très peu différent dans toute l'épaisseur du voile de sa valeur sur la surface moyenne que nous avons déjà considérée d'après l'expression (6), les moments de torsion m_{sz} dans le voile proviennent seulement de $\frac{\partial v}{\partial z}$.

Donc, tenant compte de (1) :

$$(13) \quad m_{sz} = GI_s \sum_{k=1}^n V'_k(z) \alpha_k(s)$$

$\alpha_k(s)$ = rotation locale du voile au point d'abscisse curviligne s correspondant aux déplacements $v = \psi_k(s)$ ou bien aux moments fléchissants transversaux $m_k(s)$. Il faut aussi introduire de telles distributions α_k , pour lesquelles $v = 0$ dans la surface moyenne ($\alpha_6 \dots \alpha_9$ à la fig. 6).

On peut choisir les composantes fondamentales pour un profil à trois âmes d'après la figure 6 où nous avons omis les composantes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_2, \psi_3$ qui sont semblables à celles indiquées figure 3.

Pour la composante φ_4 , il faut tenir compte de ce que $\gamma = 0$ sur la surface moyenne du voile dans toute la section (hypothèse de Wagner [1]). Dans ces conditions la fonction de gauchissement dans le hourdis et les âmes est donnée par la surface sectorielle de Vlasov [2], à savoir :

$$(14) \quad \varphi_4(s) = \omega(s) = \int_0^s \rho dF$$

Si l'on rapporte la rotation de la section au centre de torsion O' , on a de plus [2] :

$$(14 a) \quad U_4 = V_1$$

Par ailleurs les fonctions ψ_4 et ψ_5 permettent de tenir compte des différences de flèches des différentes âmes et les fonctions $\varphi_5 = \pm y(s)$, $\varphi_6 = y(s)$ des autres composantes de gauchissement (V. fig. 6).

Si l'on peut négliger les déformations dues au cisaillement dans les âmes, on a (fig. 6) :

$$(14 b) \quad U_5 = V_1, \quad U_6 = V_3$$

comme pour la flexion de la section entière.

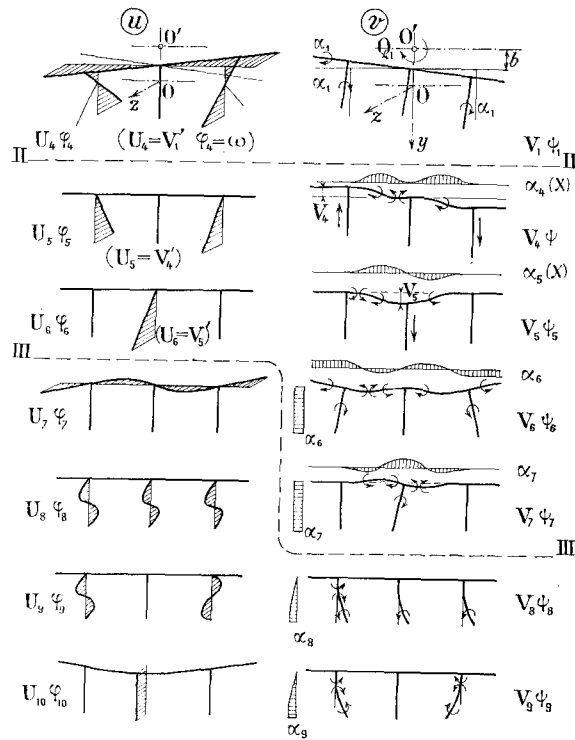


Fig. 6

Avec les fonctions ψ_6 et ψ_7 on introduit la rigidité à la torsion simple des différentes parties de la section ouverte.

Les composantes introduites jusqu'ici permettent habituellement d'obtenir des résultats constituant une bonne approximation. Si la poutre est trop courte, il faut encore introduire les gauchissements de hourdis (qui est d'habitude très large) et des âmes individuelles selon les fonctions φ_7 , φ_8 , φ_9 et les cisaillements variables comme à la figure 3 selon les fonctions $\psi_6 - \psi_9$, etc.

En tenant compte des moments de torsion (13), il faut ajouter dans l'expression (7) de l'énergie potentielle le terme :

$$(15) \quad + \int_{(z)} \int_{(s)} \frac{m_s^2}{2GI_s} ds dz$$

En conséquence, on trouve dans l'expression (8) de δU le terme supplémentaire :

$$(16) \quad + \int_{(z)} \sum_{k=1}^n \left\{ GI_s \alpha_k \sum_{l=1}^n V_l \alpha_l (\delta V_k)' ds \right\} dz$$

On obtient ainsi de nouveau les équations d'équilibre (9), la seule différence étant que r_{kl} est donnée par :

$$(17) \quad r_{kl} = \int_{(F)} \psi_k \psi_l dF + I_s \int_{(S)} \alpha_k \alpha_l ds$$

les autres caractéristiques de section a_{ij} , b_{ij} , c_{ik} , s_{kl} sont toujours données par (10). Pour la résolution mathématique, nous nous trouvons toujours devant le même problème.

Explicitons les équations simultanées pour un profil ouvert à deux âmes; en tenant compte seulement des composantes φ_1 , ψ_2 , ψ_4 , ψ_5 selon la figure 7 et en négligeant la déformation due au cisaillement sur la surface moyenne $p_1 = p_4 = p_5 = 0$ et $q_5 = 0$ nous avons selon (9) ($i = 1, 4, 5$, $k = 1, 4, 5$).

$$(18) \quad \begin{aligned} & - (Ea_{11}U_1)' - (Ea_{14}U_4)' - (Ea_{15}U_5)' + Gb_{11}U_1 + Gb_{14}U_4 + Gc_{11}U_4 = 0 \\ & \quad \quad \quad V_4 = V_1 \\ & \quad \quad \quad V_5 = V_4 \\ & (Gc_{11}U_1)' - (Gc_{41}U_4)' - (Gr_{11}U_4)' - (Gr_{14}U_5)' = q_1 \\ & \quad \quad \quad (Gr_{41}V_4)' - (Gr_{44}V_5)' + Es_{44}V_4 = q_4 \\ & \quad \quad \quad - (Gr_{55}V_5)' + Es_{55}V_5 = 0 \end{aligned}$$

VII. Les contraintes, les efforts et les déformations de l'axe de la pièce.

Les contraintes normales longitudinales σ et les contraintes de cisaillement τ dans la surface moyenne sont $\sigma = E\varepsilon$ et $\sigma = G\gamma$ où ε et γ sont donnés par (6), (2) et (13).

Les efforts dans la section [2] sont définis comme :

$$(19) \quad P_i(z) = \int_F \sigma \varphi_i dF \quad Q_k(z) = \int_F \sigma \psi_k dF$$

et selon (6) ils s'expriment par :

$$(20) \quad P_i = E \sum_{j=1}^m a_{ij} U_j \quad Q_k = G \left(\sum_{j=1}^m c_{kj} U_j + \sum_{l=1}^n r_{kl} V_l \right)$$

Les contraintes ne peuvent être calculées à partir des efforts (20) que pour les pièces à section constante (voir [2]), puisque c'est seulement dans ce cas là que les fonctions φ_i et ψ_k peuvent être choisies orthogonales.

En particulier, les éléments de réduction au sens de la statique élémentaire des contraintes dans la section (efforts en termes statiques) sont :

$$\begin{aligned} P_1 & \quad \text{effort normal } N; \\ P_2 \text{ et } P_3 & \quad \text{moments fléchissants } M_y \text{ et } M_x; \\ Q_2 \text{ et } Q_3 & \quad \text{efforts tranchants } Q_x \text{ et } Q_y; \\ Q_1 & \quad \text{moment de torsion } M_y. \end{aligned}$$

Par contre les autres efforts internes ne sont plus des éléments de réduction au sens de la statique élémentaire; P_4 est le bi-moment B (longitudinal) Q_4 est le bi-moment transversal, etc.

Les relations classiques d'équilibre sont :

$$\begin{aligned} N' &= -p_1, \quad Q_x' = -q_2, \quad Q_y' = -q_3 \\ M_x' &= -q_1, \quad M_y' - Q_y = -p_3, \quad M_y' + Q_x = -p_2 \end{aligned}$$

et l'on peut vérifier qu'elles découlent aussi des trois premières équations (9) quand on y a substitué (19) et (20).

Les déformations de l'axe de la pièce sont représentées par les valeurs :

$$(22) \quad \begin{aligned} U'_1 &= \varepsilon_z & U'_2 &= k_y & U'_3 &= k_x \\ V'_1 &= k_z & V'_2 - U_2 &= \gamma_x & V'_3 + V_3 &= \gamma_y \end{aligned}$$

ε_z = déformation relative longitudinale de l'axe;
 k_x, k_y = courbures de l'axe en flexion;
 k_z = courbure en torsion (angle spécifique de torsion);
 γ_x, γ_y = angle de cisaillement de l'axe.

Dans le cas d'angle de cisaillement nul on a les relations déjà notées :

$$U_2 = + V'_2 \quad \text{et} \quad U_3 = - V'_3$$

et les courbures :

$$k_y = V'_2 \quad k_x = - V'_3$$

VIII. Les pièces courbes.

Considérons une pièce dont l'axe longitudinal est courbe dans le plan (x, z) (fig. 1b), z étant la longueur de l'axe courbe et $()'$ la dérivée correspondante, R son rayon de courbure.

Pour les pièces courbes les expressions (7) et (15) de l'énergie potentielle π ne sont plus valables.

En premier lieu, si l'on gardait le sens cinématique des déplacements U_i et V_k (d'après fig. 3 à 7) l'expression (6) des déformations prendrait une autre forme car on n'a plus : $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z}$ et $\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}$, étant donné que les fibres longitudinales $s = \text{constantes}$ sont courbes.

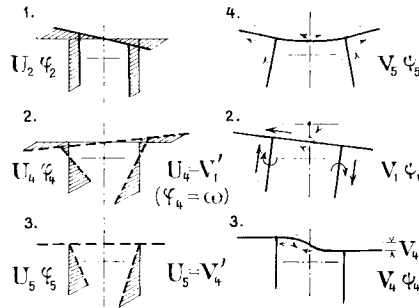


Fig. 7

De plus les sections voisines ne sont plus parallèles, elle forment l'angle dz/R . Il faudrait donc, en toute exactitude écrire dans (7) et (15), $(1 - x/R)dz$ au lieu de dz . Mais, en première approximation, pour les pièces suffisamment étroites par rapport au rayon R , le facteur $(1 - x/R)$ peut être omis (comme on le fait, par exemple, dans la théorie classique de la flexion des arcs basée toujours sur l'équation $EJ_y k_y = M_y$ ou bien celle des poutres courbes).

Cependant, d'après le principe de la méthode variationnelle, on peut garder les expressions (6) même pour les pièces courbes. Mais, en conséquence, nous sommes obligés d'abandonner le sens cinématique des déplacements U_i et V_k , qui interviennent dans l'expression (8) de la variation de l'énergie potentielle et dans les conditions aux limites. Maintenant, ils ont donc seulement le sens de paramètres mathématiques figurant dans les expressions (6).

Nous noterons :

$$u_x, u_y, u_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$$

les translations et rotations de la section considérée comme corps rigide qui remplacent pour les pièces courbes les valeurs $V_2, V_3, U_1, U_3, U_2, V_1$ (d'après fig. 3 ou 5) correspondant aux pièces droites, pour lesquelles on aurait $u_x = V_2$, etc.

Dans l'expression du travail des charges nous introduisons la simplification suivante. Nous supposons qu'il suffit, pour les pièces courbes, de prendre en compte seulement les valeurs réelles de translation u_x, u_y, u_z et de rotation $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ de la section considérée comme corps rigide et que tous les autres paramètres d'ordre supérieur U_4, V_4, U_5, V_5 , etc., peuvent toujours être considérés, en première approximation, comme paramètres de déformation de la section d'après la figure 3 ou 5 (par exemple paramètre de gauchissement, de distorsion, etc.).

Nous pouvons donc écrire, en première approximation, le travail des charges extérieures sous la forme :

$$(23) \quad \int_{(z)} (p_1 u_z + r_2 \varphi_x + p_3 \varphi_x + q_1 \varphi_z + q_2 u_x + q_3 u_y) dz + \int_{(z)} \left(\sum_{i=4}^m p_i U_i + \sum_{k=4}^n q_k V_k \right) dz$$

Indiquons que cette approximation nous paraît satisfaisante pour le gauchissement et la distorsion d'une section fermée (fig. 3) mais fort inexacte pour le cas de la flexion transversale des poutres à profilé ouvert (fig. 6 ou 7), où les âmes elles-même agissent d'une manière considérable comme pièces corubes.

Maintenant il nous faut encore introduire dans l'équation (23) les relations entre u_x, \dots et $V_2 \dots V_1$.

Tout d'abord, il y a lieu de prendre en considération les équations d'équilibre bien connues entre les charges extérieures $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ et les efforts internes statiques $M_x, M_y, M_z, Q_x, Q_y, Q_z$ considérés comme résultantes statiques de toutes les forces extérieures, réactions incluses, agissant à gauche de la section d'une pièce courbe. Si nous supposons pour simplifier $p_2 = p_3 = 0$ ils ont la forme :

$$(24) \quad \begin{aligned} q_2 &= M_y'' - \frac{N}{R} & b_3 &= -M_x'' - \frac{M_z'}{R} \\ p_1 &= -N' - \frac{M_y'}{R} & q_1 &= -M_z' + \frac{M_x}{R} \end{aligned}$$

Les expressions géométriques des changements de courbure et de l'allongement de l'axe de la pièce courbe sont, si l'on suppose pour simplifier que les angles de cisaillement γ_x et γ_y sont nuls :

$$(25) \quad \begin{aligned} k_x &= -u_y'' + \varphi_{x/R} & k_y &= u_x' + u_{y/R}' \\ k_z &= \varphi_x' + u_{y/R}' & \varepsilon_x &= u_x'' - u_{x/R}'' \end{aligned}$$

Elles découlent par exemple, directement des relations (24) par analogie des forces et des déformations [6]. Puisque nous avons gardé la forme des expressions (6), leurs relations (22) avec les paramètres $U_1 \dots V_3$ restent toujours valables et nous avons ainsi la relation cherchée entre $U_1 \dots V_3$ et $u_x \dots \varphi_x$.

Au moyen des relations (24) et (25) on peut effectuer dans la première intégrale de (23) une intégration par parties. On obtient ainsi le travail des charges extérieures sous la forme :

$$(26) \quad \int_{(z)} \left(\sum_{i=4}^m p_i U_i + \sum_{k=4}^n q_k V_k \right) dz + [\dots]_{z_1}^{z_2} + \int_{(z)} (M_x k_x + M_y k_y + M_z k_z + N \varepsilon_x) dz$$

dans laquelle le terme qui n'est pas sous un signe d'intégrale n'influe pas sur les équations différentielles.

Cette expression est évidemment valable sous la même forme pour les pièces droites, avec M_x, M_y, \dots donnés par (21) et avec $k_x \dots$ donnés par (22).

Puisque l'expression de l'énergie due aux efforts internes garde dans (7) la même forme, nous pourrions

finalement conclure que les équations différentielles (9) sont également valables pour les pièces courbes, si l'on remplace dans les premières équations $i = 1, 2, 3$ et $k = 1, 2, 3$ les valeurs :

$$p_1, q_1, q_2, q_3 \quad \text{par} \quad -N', \quad -M_1', \quad M_2', \quad -M_3'$$

tandis que les autres équations pour $i > 3, k > 3$ restent inchangées. Les premières équations (9) ont donc la forme.

$$(27) \quad \begin{aligned} & - \sum_{j=1}^m (Ea_{1j}U_j)' + \sum_{j=4}^m Gb_{1j}U_j + \sum_{l=2}^n Gc_{1l}V_l = -N' \\ & - \sum_{j=4}^m (Gc_{j1}U_j)' - \sum_{l=1}^n (Gr_{1l}V_l)' + \sum_{l=1}^n Es_{1l}V_l = -M_1' \\ & - \sum_{j=4}^m (Gc_{j2}U_j)' - \sum_{l=1}^n (Gr_{2l}V_l)' + \sum_{l=1}^n Es_{1l}V_l = M_2' \\ & - \sum_{j=4}^m (Gc_{j3}U_j)' - \sum_{l=1}^n (Gr_{3l}V_l)' + \sum_{l=1}^n Es_{3l}V_l = -M_3' \end{aligned}$$

Soulignons encore que, dans les équations ainsi obtenues, les efforts M_x, \dots sont liées aux charges par les relations (24) et que les paramètres $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$ sont liées aux déplacements et aux rotations de la section par les relations (22) et (25).

Nous ne traiterons pas de la mise en équation plus exacte où l'on tiendrait compte du fait que, dans les pièces courbes, $U_4, V_4 \dots$ etc., ne peuvent plus être exactement considérés comme paramètres de déformation tels qu'indiqués figure 3 ou 5. L'étude de ce problème serait probablement intéressante pour les déformations par flexion transversale de la section à profil ouvert (fig. 6 ou 7).

Mais ce cas aurait peu d'importance en pratique, parce que, pour les pièces courbes, on utilise presque exclusivement les sections à profil fermé, qui résistent beaucoup mieux à la torsion.

Les conditions aux limites pour les pièces courbes peuvent être formulées à l'aide des valeurs $u_x, \dots U_4$ ou $M_x \dots p_4$.

BIBLIOGRAPHIE

1. NOWINSKI, J. : *Theory of thin-walled bars (feature article)*, Applied Mechanic Reviews 12, 1959, no. 4, pp. 219-227.
2. VLASOV, V. Z. : *Pièces longues à voiles minces*, 2^e éd. (en russe) Moscou 1959. Fizmatgiz, (traduction : Eyrolles 1962, Paris).
3. MICHÁLEK, V. - BŘEZINA, V. : *Model test on a box girder bridge*, 7^e Congress Int. Assoc. Bridges Struct. Engng, (A. I. P. C.), Prelim. Publ., 123-130, Rio de Janeiro 1964.
4. CAŽANT, Z. P. : *L'action spacielle des poutres des ponts*, cours lithographié à la Faculté de Construction des E. P., Prague 1965.
5. BAŽANT Z. P. : *Nonuniform torsion of thin-walled bars of variable section*, Mémoires — Abhandlungen — Publications, A. I. P. C. (Zürich), 1965, pp. 17-39.
6. BAŽANT, Z. P. : *Conjugate analogy for space structures*, Proc. Asce, Jour. Struct. Div., June 1966, ST3, pp. 137-159.
7. REKTORYS K. et co-auteurs : *Résumé de la mathématique appliquée* (en tchèque), Praha 1963.
8. COURBON, J. : *Résistance des matériaux*, tome II, Dunod, Paris.