Bažant, Z.P. (1965). "Ein neues Modell f¨ur Beschreibung der rheologischen Eigenschaften von glasfaserverst¨arkten Plasten" (A new model for rheological behavior of reinforced plastics), Proc., *Erste International-Tagung ¨uber GFP und 22 Epoxydharze*, held in Berlin, Institut f¨ur Kunststoffe D. A. W., Paper E3/1.

Ein neues Modell zur Beschreibung der rheologischen Eigenschaften von glasfaserverstärkten Plastèn

Z. P. Bazant CSc.

Bauforschungsinstitut der T. H. Prag, CSSR

Es wird ein neues rheologisches Modell für das Kriechen von GFK entworfen. In einfachster Form, welche nur für ein beschränktes Intervall nach Lastaufbringen gilt, besteht das Modell aus 5 Sprungfedern und Dämpfern und einem Schnapper, welcher die Nichtlinearität in Beziehung zur langzeitigen reversiblen und dauernden Deformationen bringt. Der Vorteil dieses Modells ist eine einfache mathematische Behandlung. In den meisten Fällen der Beanspruchung von Konstruktionen, wie z. B. konstante Last oder konstante erzwungene Formänderung führt dieses Modell zur linearen Viskoelastizität.

1. Spezifische Probleme der Berechnung von GFK-Konstruktionen

Für das mechanische Verhalten von glasfaserverstärkten Kunststoffen (GFK) sind besonders folgende Probleme charakteristisch: 1. die Zeit und ihr Einfluß auf Spannungsverteilung, Deformationen und Dauerfestigkeiten (Lebensdauer), 2. die Ermittlung der durch die Glasfaserverstärkung verursachten Anisotropie und Nichthomogenität , 3. der Temperatureinfluß, 4. Bruchkriterien für den mehrachsigen Spannungszustand, evtl. auch unter Berücksichtigung des Zeiteinflusses.

Die langzeitigen Formänderungen, die als Kriechen bezeichnet werden, beeinflussen in den Konstruktionen 1. die Spannungsumlagerungen infolge innerer Nichthomogenität und Anisotropie von GFK und Nichthomogenität der statisch unbestimmten Konstruktionen oder Elemente, 2. Stabilität unter Dauerlast, 3. Größe der Deformationen, 4. Sicherheit gegen Bruch unter Dauerlast (Dauerfestigkeit als Funktion vom Spannungsverlauf).

Die innere Nichthomogenität besteht in der Zusammenwirkung von Harz und Glasfasern. Die Nichthomogenität der Konstruktion wird hauptsächlich durch Zusammenwirkung mit den anderen Materialen hervorgerufen, wie z. B. mit Stahl, Leichtmetallen, Beton, Holz. Als Beispiel dienen Sandwichkonstruktionen, Träger, Platten und Schalen, die mit Metall verstärkt sind, Bogen oder Schalen mit Zugband, Hängeträger (statisch unbestimmte Systeme), Verbindungen von verschiedenen GFK-Teilen usw. Bedeutende Nichthomogenität entsteht manchmal in Konstruktionen, deren Teile aus GFK verschiedener Art, besonders in Verbundträgern, bestehen, z. B. geschichtete Platten mit verschiedenem Verstärkungsanteil oder Art der Verstärkung (Gewebe, Matte) einzelner Schichten.

Die Nichthomogenität bewirkt beim Kriechen die Umlagerungen der Innenkräfte aus den Teilen, deren Kriechen größer ist in die Teile, deren Kriechen kleiner ist (größerer Verstärkungsanteil, Metall, Glas). Die orthotropen GFK-Platten, wo das Kriechen für Drillungsmomente bedeutend stärker ist als für Biegemomente, so daß unter Dauerlast die Biegemomente sich im Zeitverlauf vergrößern und die Drillungsmomente sich verkleinern. Dasselbe entsteht auch bei ebenem, statisch unbestimmtem Spannungszustand, wobei die Normalspannungen sich vergrößern und die Schubspannungen sich verkleinern.

Die rheologischen Eigenschaften von GFK wurden bereits von verschiedenen Forschern untersucht /6/, /8/, /9/. In dieser Arbeit versuchen wir eine allgemeine Formulierung kurz abzuleiten, die für die wichtigsten Fälle und Zeitverläufe der Beanspruchung mit den bisherigen Kenntnissen in Übereinstimmung stehen.

2. Formänderungen von Harz im Rahmen der linearen Viskoelastizitätstheorie

Zuerst wenden wir uns den langzeitigen Verformungen des Harzes zu. Wir erwägen einstweilen ein beschränktes Zeitintervall, dessen Anfang und Ende von nicht sehr verschiedener Größenordnung ist, z. B. von 3 Tagen bis 180 Tagen nach Lastaufbringen (aber nicht von 10 Minuten bis 180 Tagen). Die einfachste Form der Kriechkurve der Dehnung $\varepsilon_x(t)$ in Richtung der Koordinatenachse in Abhängigkeit von der Zeit t unter einachsiger Beanspruchung durch konstante Normalspannung $\sigma_x(t)$ ist die Exponentialkurve /8/, wobei die Endlichkeit des Grenzwertes von $\varepsilon_x(t)$ für $t \to \infty$ theoretisch vorausgesetzt werden kann. Die Kriechkurve läßt sich also schreiben in der Form (Bild 1)

Hier bedeutet τ den Zeitpunkt des Aufbringens der Spannung σ_x und E_p, $E_{p\infty}$ und τ_p Materialkonstanten; E_p ist der Elastizitätsmodul, $E_{p\infty}$ ist der Modul für den Endwert $\varepsilon_x(\infty) = \sigma_x / E_{p\infty}$, $E_{p\infty} \leq E_p$ τ_p ist die Retardationszeit. Für Polyester ist gewöhnlich $E_{p\infty} = (0{,}25$ bis $0{,}3) E_p$, ($\tau_p = 30$ bis 40 Tage).

Der Verlauf von $\varepsilon_x(t)$ für allgemein zeitveränderliche Spannungsbeanspruchung $\sigma_x(t)$ ist in einfachster Weise zu ermitteln, wenn die Gültigkeit des Superpositionsprinzips für die, in verschiedenen Zeitpunkten aufgebrachten Belastungen oder Verformungen vorausgesetzt wird. Dann erhält man durch Teilintegration

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_x(t)}{E_p} + \frac{1}{\tau_p}\left(\frac{1}{E_{p\infty}} - \frac{1}{E_p}\right)\int_{t_0}^{t} \sigma_x(\tau)\, e^{-\frac{t-\tau}{\tau_p}}\, d\tau \qquad (2)$$

Wenn der Verlauf von $\varepsilon_x(t)$ gegeben ist, bildet diese Gleichung die Integralgleichung von Volterra für die Unbekannte $\sigma_x(t)$. Infolge der Einführung der Exponentialfunktion in (1) kann man leicht diese Gleichung in eine Differentialgleichung überführen. Wenn die 1. Ableitung von (2) nach t gebildet wird, findet man nämlich, daß darin dasselbe Integral wie in (2) auftritt. Mittels Eliminierung dieses Integrals aus beiden Gleichungen, bekommt man folgende lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\tau_p \dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_x = \frac{\tau_p}{E_p}\dot{\sigma}_x + \frac{1}{E_{p\infty}}\sigma_x \qquad (3)$$

Sie bildet die Grundgleichung für das Kriechen. Hier bedeutet $\dot{\varepsilon}_x$, $\dot{\sigma}_x$ die erste Ableitung nach der Zeit t (Geschwindigkeit).

Wenn man in die Gl. (4) $\dot{\varepsilon}_x = 0$ und $\varepsilon_x = \varepsilon_{x_0}(\tau)$ (Relaxation bei konstanter, im Zeitpunkt τ erzwungener Formänderung ε_{x_0}) einsetzt, ergibt sich nach Lösung der Differentialgleichung die Relaxationskurve

$$\sigma_x(t,\tau) = \varepsilon_{x_0}(\tau)\left[E_{p\infty} + (E_p - E_{p\infty})\, e^{-\frac{E_p}{E_{p\infty}}\frac{t-\tau}{\tau_p}}\right] \qquad (4)$$

Es wäre gleichwertig, wenn man von dieser Gleichung für die Relaxationskurve statt von Gl. (1) ausgegangen wäre. Man erhielte dann nach dem Superpositionsprinzip für die Formänderungen in ähnlicher Weise die Integralgleichung

$$\sigma_x(t) = E_p\,\varepsilon_x(t) - \left(\frac{E_p}{E_{p\infty}} - 1\right)\frac{E_p}{\tau_p}\int_{t_0}^{t} \varepsilon_x(\tau)\, e^{-\frac{E_p}{E_{p\infty}}\frac{t-\tau}{\tau_p}}\, d\tau \qquad (5)$$

die die Resolvente von (2) darstellt. Sie führt wieder auf Gl. (3).

Bisher haben wir ein beschränktes Zeitintervall mit Grenzen von nicht sehr verschiedener Größenordnung in Betracht gezogen. Wenn das Kriechen in längerem Intervall nach Lastaufbringen ausgedrückt werden soll, müßte man in die Gl. (1) mehrere (n) Exponentialglieder mit verschiedenen Relaxationszeiten τ_{p_1}, τ_{p_2}, ... einführen. Bei Annahme des Superpositionsgesetzes in ähnlicher Weise wie in (1) und (2) erhält man dann die Integralgleichung mit dem, von mehreren (n) Exponentialfunktionen zusammengesetzten Kern. Diese Integralgleichung kann man überführen in lineare Differentialgleichung höherer (n-ter) Ordnung zwischen ε_x und σ_x. Sie hat allgemein die Form

$$E_p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon_x = \sigma_x \qquad (6)$$

wo $E_p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ einen Differentialoperator in Form des Verhältnisses von zwei Polynomen von $\frac{\partial}{\partial t}$ bedeutet, d. h.

$$E_p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{b_0 + b_1\frac{\partial}{\partial t} + \dots + b_m\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m}{a_0 + a_1\frac{\partial}{\partial t} + \dots + a_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n} \qquad (7)$$

Wegen der Endlichkeit der Formänderungen bei $t \to \infty$ muß gelten $b_0/a_0 = E_{p\infty}$. Der Existenz augenblicklicher elastischer Formänderungen wegen, ist $m = n$ und $b_n/a_n = E_p$. Die Gl. (3) bildet einen speziellen Fall für

$$E_p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{1 + \tau_p\frac{\partial}{\partial t}}{1/\ldots + (\tau_p \ldots)} \qquad (8)$$

Im allgemeinsten Falle von linearem Kriechen (Viskoelastizität) gehen in (7) die Polynome in unendliche Potenzreihen über.

Für die Anschauung ist es sehr praktisch, die angeführten Gleichungen mit einem mechanischen, aus Sprungfedern und Dämpfer zusammengesetzten rheologischen Modell darzustellen. Die Gl. (3) wird durch das sog. normale Modell nach Bild 2 a oder ein äquivalentes Modell nach Bild 2 b repräsentiert ($E_1 = (E_{p\infty}^{-1} - E_p^{-1})^{-1}$, $\eta = \tau_p E_1$).

Im allgemeinsten Falle der linearen Viskoelastizität, Gl. (6), wird die Zahl der Sprungfedern und Dämpfer, sowie ihrer Verbindungen verschiedener Art, unendlich. Der allgemeine Fall von Relaxation bei gegebenem Formänderungsverlauf läßt sich als unendliche Reihe von parallel geschalteten Maxwell-Elementen darstellen (Wiechert-Modell; Bild 2 d). Allgemeines Kriechen bei vorgeschriebenem Spannungsverlauf kann man mit einer unendlichen Reihe von miteinander verbundenen Voigt(Kelvin)-Elementen (allgemeines Kelvin-Modell; Bild 2 c) beschreiben.

Weiter ist es nötig, die Querdehnung $\varepsilon_y(t)$ bei der Spannung $\sigma_x(t)$ zu ermitteln. Wenn auch hier die Linearität und das Superpositionsgesetz angenommen wird, sind alle Gleichungen analog zur Gl. (1) bis (8), mit der einzigen Verschiedenheit, daß statt E der Quotient E/ steht. Unter der Annahme der Gültigkeit des Superpositionsgesetzes auch für verschiedenachsige Spannungszustände, kann man dann die allgemeine Beziehung zwischen Spannungen und Formänderungen in der Form

$$\underline{E}_p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon_x = \sigma_x - \underline{\mu}_p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\sigma_y + \sigma_z), \dots \qquad (9)$$

$$\underline{G}_p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\gamma_{xy} = \tau_{xy}, \dots \qquad (10)$$

schreiben, wo im allgemeinen $\underline{\mu}_p$ und $\underline{G}_p$ Differentialoperatoren in der Form von (7), jedoch mit anderen Konstanten, bedeuten. Der Isotropie halber, sind diese Operatoren, analog zur Elastizitätslehre, mit der Beziehung $2\underline{G}_p(1+\underline{\mu}_p) = \underline{E}_p$ verbunden.

Im einfachsten Falle der Gleichung erster Ordnung sind die Operatoren $\underline{G}_p$ und $\underline{\mu}_p/\underline{E}_p$ ebenso wie jeder mit drei Konstanten versehen. Annähernd kann man schreiben

$$\tau_p\dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_x = \frac{\tau_p}{E_p}\left(\dot{\sigma}_x - \mu_p\dot{\sigma}_y - \mu_p\dot{\sigma}_z\right) + \frac{1}{E_{p\infty}}\left(\sigma_x - \mu_{p\infty}\sigma_y - \mu_{p\infty}\sigma_z\right) \qquad (11)$$

$$\tau_p\dot{\gamma}_{xy} + \gamma_{xy} = \frac{\tau_p}{G_p}\dot{\tau}_{xy} + \frac{1}{G_{p\infty}}\tau_{xy}, \dots \qquad (12)$$

wo dieselbe Retardationszeit τ_p für Schub- und Längsformänderungen näherungsweise vorausgesetzt wird. G_p ist der Schubmodul, μ_p ist die Poissonsche Zahl. Es gilt hier, der Isotropie halber, $G_{p\infty} = \frac{1}{2}E_{p\infty}/(1+\mu_p)$. Es bringt eine Vereinfachung, wenn man $\mu_{p\infty} = \mu_p$ annimmt.

Manchmal ist es zweckmäßig, die Deviatorkomponenten des Spannungs- und Formänderungstensors zu benutzen. Die Gl. (10) bzw. (12) bleibt dieselbe, aber anstatt der Gl. (9) bzw. (11) muß man die Beziehung zwischen $\sigma_v = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ und $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ einführen. Analog zur Gleichung $\sigma_v = 3K_p\varepsilon_v$ für nur elastische Formänderungen, wobei K_p den Volumenmodul bezeichnet, erhält man

$$3\underline{K}_p\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon_v = \sigma_v \qquad (13)$$

Hier bedeutet K_p wieder einen Operator in Form von (7), wobei wegen der Isotropie $3\underline{K}_p(1-2\underline{\mu}_p) = \underline{E}_p$ gilt. Für Kunststoffe zeigt es sich aber, daß $\underline{K}_p$ vereinfacht werden kann. Näherungsweise kann man nämlich annehmen, daß alle Volumenveränderungen nur elastisch sind. Dann wird $\underline{K}_p = K_p$, woraus für die Gl. (9) $\underline{\mu}_p = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \mu_p\right)\frac{\underline{E}_p}{E_p}$ folgt. Bei der Gl. (3) erster Ordnung führt dies zu Gleichungen in Form von (11-12), worin

$$\frac{\mu_{p\infty}}{E_{p\infty}} = \frac{\mu_p}{E_p} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_{p\infty}} - \frac{1}{E_p}\right), \quad \frac{1}{G_{p\infty}} = \frac{1}{G_p} + 3\left(\frac{1}{E_{p\infty}} - \frac{1}{E_p}\right) \qquad (14)$$

Bei noch stärkerer Vereinfachung der Nichtzusammendrückbarkeit des Volumens (ε_v = const.) kann man weiter $K \to \infty$, $\mu_p = 0{,}5$, $3G_p = E_p$, $\mu_{p\infty} = 1/2$, $3G_{p\infty} = E_{p\infty}$ einsetzen.

3. Das lineare Kriechen von glasfaserverstärkten Plasten

Auch die langzeitigen Kriechformänderungen kann man rechnerisch nach Zusammenwirkung von viskoelastischem Harz und vollkommen elastischem Glas ausdrücken. Der Einfachheit halber untersuchen wir zuerst die nur in einer Richtung verstärkte Platte, und stellen die Beziehung von $\varepsilon_x(t)$ und mittlerem $\sigma_x(t)$ fest. Die elastischen Formänderungen sind mit der Gleichung (14a) gegeben, wobei E_s der effektive Elastizitätsmodul von Glasfasern, F_{x_s} die Querschnittsfläche von Glasfasern pro Längeneinheit, F die Dicke der Platte und $F_{xp} = F - F_{xs}$ die Querschnittsfläche vom Harz sind. Die Differentialgleichung für das Kriechen leitet man mittels Ersetzung von E_p durch den Operator $\underline{E}_p$ nach (8) ab, welcher der Gl. (3) entspricht. So ergibt sich (15)

$$(E_s F_{x_s} + E_p F_{xp})\varepsilon_x = E_x F \varepsilon_x = \sigma_x F \qquad (14a)$$

$$E_x F_{x_s} + \left(1+\tau_p \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{E_{p\infty}} + \frac{\tau_p}{E_p}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} F_{xp}\Big]\varepsilon_x = \sigma_x F \qquad (15)$$

und nach Umformen

$$\tau_{R_x}\dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_x = \frac{\tau_{R_x}}{E_x}\dot{\sigma}_x + \frac{1}{E_{\infty_x}}\sigma_x \qquad (16)$$

wobei

$$E_x F = E_s F_{xs} + E_p F_{xp}, \quad E_{\infty_x} F = E_s F_{xs} + E_{p\infty} F_{xp},$$

$$\tau_{R_x} = \tau_p \frac{E_{p\infty}}{E_p} \frac{E_x}{E_{\infty_x}} \qquad (17)$$

ist.

Für die Platte, die in zwei Richtungen verstärkt ist, erhält man eine Gleichung höherer Ordnung. Jedoch kann man näherungsweise die Gl. (16) auch annehmen, wobei man die Koeffizienten nach (17) oder genauer noch mit dem Einfluß der Querfasern nehmen kann.

Die Gleichung (16) hat offensichtlich dieselbe Form wie Fl. (3) (analog Bild 2 a) und demzufolge ist ihre Behandlung dieselbe. Für den Verlauf von ε_x bei konstanter Spannung oder von σ_x bei konstanter Dehnung gelten die Formeln, die (1) und (4) analog sind. Ebenso kann man leicht auch die zu (2) und (5) analogen Gleichungen schreiben.

Die Kräfteverteilung zwischen Glas und Harz in der Zeit t ist direkt durch $\varepsilon_x(t)$ und $\sigma_x(t)$ gegeben. Die Spannung im Glas ist $\sigma_{x_s}(t) = E_s\ \varepsilon_x\ (t)$, im Harz ist sie $\sigma_{xp}(t) = [\sigma_x(t) - E_a \varepsilon_x(t)]/F_{xp}$ (vollständige Adhäsion vorausgesetzt).

Wie bei den Elastizitätskonstanten kann auch hier die Gl. (17) nicht als genau betrachtet werden. Deswegen ist es besser, die Gleichung (16) als Hypothese anzuschauen und ihre Konstanten - wenn möglich - direkt zu messen.

Mit Rücksicht auf die anisotrope Struktur von GFK gelten in den Richtungen x und y Gleichungen (16) mit unterschiedlichen Koeffizienten. Annähernd kann man annehmen, daß die Retardationszeiten für verschiedenachsige Spannungen gleich sind. Dann ergibt sich einfach für den mehrachsigen Spannungszustand

$$\tau_R \dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_x = \tau_R\left(\frac{\dot{\sigma}_x}{E_x} - \frac{\mu_y}{E_y}\dot{\sigma}_y\right) + \frac{\sigma_x}{E_{\infty_x}} - \frac{\mu_{\infty y}}{E_{\infty y}}\sigma_y, \dots \qquad (18)$$

$$\tau_R \dot{\gamma}_{xy} + \gamma_{xy} = \frac{\tau_R}{G_{xy}}\dot{\tau}_{xy} + \frac{\tau_{xy}}{G_{\infty_{xy}}}, \dots \qquad (19)$$

wo τ_R, E_{∞_x}, $E_{\infty y}$, $\mu_{\infty x}$, $G_{\infty_{xy}}$ weitere 4 unabhängige Materialkonstanten bedeuten

Für das lange Zeitintervall genügen die Gleichungen 1. Ordnung nicht, und man muß die Gleichungen höherer Ordnung einführen,

$$\varepsilon_x = \underline{E}_x^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_x - \underline{\mu}_y\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\underline{E}_y^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_y, \dots \qquad (20)$$

wo $\underline{E}_x$, $\underline{E}_Y$, $\underline{\mu}_x$ und $\underline{G}_{xy}$ 4 unabhängige Differentialoperatoren in Form von (7) sind $(\underline{\mu}_x/\underline{E}_x = \underline{\mu}_y/\underline{E}_y)$.

Die Annahme von der Nichtzusammendrückbarkeit des Volumens brachte bei anisotropen Platten keine Vereinfachung. Näherungsweise kann man manchmal annehmen $E_{\infty x}/E_x = E_{\infty y}/E_y; \mu_{\infty y}/E_{\infty y} = \mu_y/E_y, \ldots$. In der Praxi kommt es oft zu $F_{xs} = F_{xy}$, deswegen kann man dann $E_x = E_y = E$, $\mu_x = \mu_y = \mu$, $E_{\infty x} = E_{\infty y} = E_\infty$ und $\mu_{\infty x} = \mu_{\infty y} = \mu_\infty$ einsetzen. (gleichachsige Orthotropie).

Der zweite wichtige Fall von GFK-Platten ist durch isotrope Platten gegeben, die gewöhnlich mit Matten verstärkt sind. Die Ermittlung ihrer Formänderungseigenschaften ist viel einfacher als bei den orthotropen Platten. Eine Untersuchung der Zusammenwirkung von Glas und Harz führt wieder auf Gleichungen mit der Form von (16) bzw. (20-21), die jedoch isotrop sind. Sie sind also bei $\dot{\sigma}_t = 0$ identisch mit den Gleichungen (3) bzw. (11-12) oder allgemein mit (9-10), wobei statt $\tau_p, E_p, E_{p\infty}, \ldots$ hier τ_R, E, E_∞ usw. stehen.

Für die Biegung einer orthotropen oder isotropen GFK-Platte gelten die Beziehungen, die zu den Beziehungen für den ebenen Spannungszustand in derselben Weise analog sind, wie bei den elastischen Formänderungen.

4. Nichtlinearität der Beziehung von reversiblen und irreversiblen Kriechformänderungen von glasfaserverstärkten Plasten

Für steigende oder wenig sinkende Belastung oder Formänderung (Kriech- und Relaxationskurve insgesamt) ist die lineare Viskoelastizität verhältnismäßig gut. Die größten Mißverhältnisse entstehen bei Verformungen nach augenblicklicher Entlastung von GFK. Nach der linearen Viskoelastizitätstheorie müßten bei der Annahme, daß sich die Formänderung unter ständiger Last einer endlichen Grenze für $t \to \infty$ nähert, nach Entlastung für $t \to \infty$ alle Formänderungen völlig, d. h. bis Null, rückkehrend (federnde Formänderung) sein, ebenso müßten auch die Spannungen nach Erzwingen der Formänderung null sein. So gibt z. B. die Gl. (3) bei $\sigma_x = 0$ für $t > t_1$ und der Anfangsbedingung $\varepsilon_x = \varepsilon_{x1}$ für $t = t_1$ den Verlauf

$$\varepsilon_x(t) = \varepsilon_{x1}\, e^{-\frac{t - t_1}{\tau_R}} \qquad (22)$$

Dies stimmt aber mit den Versuchen nicht überein. Die langzeitigen Formänderungen und Spannungen von GFK sind nur teilweise, ungefähr zur Hälfte, reversibel. Die elastischen Formänderungen sind viel besser reversibel (ungefähr zu 80 bis 90 %). Es ist also nötig, ein solches Modell einzuführen, daß die Nichtumkehrbarkeit von langzeitigen Formänderungen und Spannungen berücksichtigt.

Dies zu ermitteln, schlagen wir hier in erster Näherung für das beschränkte Zeitintervall das Modell nach Bild 3 vor. Parallel zum Voigt-Element (Sprungfeder und Dämpfer parallel) im Normalmodell nach Bild 2 a, welches die langzeitigen Formänderungen gibt, schließt man ein weiteres, mit einem Schnäpper eingeschaltetes, Voigt-Element ein. Bei der Zunahme der langzeitigen Formänderung ist dieses Element ausgeschaltet und bei der Abnahme der langzeitigen Formänderung wird es durch den Schnäpper eingeschaltet. Für die zunehmende oder konstante Spannung und für die Relaxation bei konstanter Formänderung gibt also dieses Modell denselben Verlauf wie das Normalmodell nach Bild 2 a, denn der Schnäpper ist geöffnet. Wenn der Schnäpper einschnappt kann man sich leicht überzeugen, daß in diesem Modell beide langzeitigen Sprungfedern und beide Dämpfer durch eine Sprungfeder und einen Dämpfer ersetzt werden können, so daß die Beziehung von Spannung und Formänderung wieder die Form von Gleichung (16) hat, jedoch mit anderen Konstanten E'_{∞} und τ'_R $(E_x \geq E'_x \geq E_{x\infty})$.

Die Konstanten der zusätzlichen Sprungfedern und Dämpfer nach Bild 3 sind dann

$$\Delta E_1 = (E'^{-1}_{x\infty} - E'^{-1}_x)^{-1} - (E^{-1}_{x\infty} - E^{-1}_x)^{-1}$$
$$\Delta\eta = \tau'_R (E^{-1}_{x\infty} - E'^{-1}_x)^{-1} - \tau_R (E^{-1}_{x\infty} - E^{-1}_x)^{-1} \qquad (23)$$

Näherungsweise kann man voraussetzen: $\tau'_R = \tau_R$, $\Delta\eta = \eta E_1/(E_x + E_1)$

Für Polyester-GFK gilt näherungsweise $E'_x = 2\, E_{x\infty}$.

Die Bedingung für die geöffnete Stellung des Schnäppers lautet $\varepsilon_x - \sigma_x/E_x \geq 0$. Da das Verhalten von Kunststoff gegenüber Zug und Druck ungefähr dasselbe ist, ist es nötig, den absoluten Wert, d. h. $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left|\varepsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x}\right| \geq 0$ zu nehmen. Das Modell nach Bild 3 stellt selbstverständlich die Formänderungen nur für unveränderliches Vorzeichen von $\varepsilon_x - \sigma_x/E_x$ dar, d. h. Verlängerung oder Verkürzung. Es hat aber keinen Zweck (obzwar es möglich ist) für beide Fälle ein gleichzeitig geltendes Modell abzubilden.

Beim Aufbringen der ersten Belastung ist immer $\frac{\partial}{\partial t}\left|\varepsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x}\right| \geq 0$, so daß die Gl. (16) gültig ist (geöffneter Schnäpper). Man schreibt dann die Lösung von ε_x und σ_x nach Gl. (16). Wenn die angeführte Ungleichheit im Zeitpunkt $t_{(1)}$ mit Werten $\varepsilon_{x(1)}$, $\sigma_{x(1)}$ zur Gleichheit übergeht und vom Zeitpunkt $t_{(1)}$ umgekehrte Ungleichheit gilt, ist für $t > t_{(1)}$ die folgende Gleichung gültig

$$\tau_R' \dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_x - \varepsilon_{x(1)} = \frac{\tau_R'}{E_x}\dot{\sigma}_x + \frac{1}{E'_{x\infty}}(\sigma_x - \sigma_{x(1)}) \text{ für } \frac{\partial}{\partial t}\left|\varepsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x}\right| \leq 0 \qquad (25)$$

Wenn die Ungleichheit (25) im Zeitpunkt $t_{(2)}$ wieder in Gleichheit übergeht und $t > t_{(2)}$ nicht erfüllt wird, gilt für $t > t_{(2)}$

$$\tau_R \dot{\varepsilon}_x + \varepsilon_x - \varepsilon_{x(2)} = \frac{\tau_R}{E_x}\dot{\sigma}_x + \frac{1}{E'_{x\infty}}(\sigma_x - \sigma_{x(2)}) \text{ für } \frac{\partial}{\partial t}\left|\varepsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x}\right| \geq 0 \qquad (26)$$

usw.

Als Beispiel errechnen wir den Verlauf von $\varepsilon_x(t)$, wenn von $t = 0$ bis $t = t_{(1)}$, $\sigma_x = \sigma_{xa} = \text{const.} > 0$ ist und im Zeitpunkt t die Spannung sich auf $\sigma_{xb} = \text{const.}$ für $t > t_{(1)}$ (Bild 1) ändert. Die Gültigkeit von (22) für $t > t_{(1)}$ voraussetzend, findet man für t $t_{(1)}$ nach dem Superpositionsprinzip den Ausdruck

$$\varepsilon_x(t) = \frac{1}{E_{x\infty}}\sigma_{xb} - \left(\frac{1}{E_{x\infty}} - \frac{1}{E_x}\right)\left[\sigma_{xa} e^{-\frac{t}{\tau_R}} + (\sigma_{xb} - \sigma_{xa}) e^{-\frac{t - t_{(1)}}{\tau_R}}\right] \qquad (27)$$

welcher nur dann gilt, wenn $\frac{\partial}{\partial t}\left|\varepsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x}\right| \geq 0$ ist. Daraus entsteht die Bedingung $\sigma_{xb} \geq \sigma_{xa}(1 - e^{-t_1/\tau_R}) = \sigma_{x(1)}$.
Für $\sigma_{xb} = \sigma_{x(1)}$ ist $\varepsilon_x(t) = \varepsilon_{x(1)} = \sigma_{x(1)}/E_{x\infty} = \text{const.}$ Wenn die Spannung zu viel abnimmt, hat man für $\sigma_{x(1)} > \sigma_{xb} \geq -\sigma_{x(1)}(E_{x\infty}^{-1} - E'^{-1}_{x\infty})(E'^{-1}_{x\infty} - E_x^{-1})^{-1}$ den Verlauf

$$\varepsilon_x(t) = \frac{\sigma_{x(1)}}{E_{x\infty}} - (\sigma_{x(1)} - \sigma_{xb})\left[\frac{1}{E'_{x\infty}} - \left(\frac{1}{E'_{x\infty}} - \frac{1}{E_x}\right)e^{-\frac{t - t_1}{\tau_R'}}\right] \qquad (28)$$

Die Grenze für $t \to \infty$ ist $\varepsilon_x(\infty) = \sigma_{x(1)}/E_{x\infty} - (\sigma_{x(1)} - \sigma_{xb})/E'_{x\infty} > \frac{\sigma_{xb}}{E_{x\infty}}$. Die Formänderung ist also nicht rückkehrend (federnd), sondern dauernd. Für $-\sigma_{x(1)}\frac{(E_{x\infty}^{-1} - E'^{-1}_{x\infty})}{(E'^{-1}_{x\infty} - E_x^{-1})} > \sigma_{xb}$ gilt die Gl. (28) nur für $t_{(1)} < t \leq t_{(2)}$ wo $t_{(2)}$ durch Gleichheit

s. u.

gegeben ist, und für $t \geq t_{(2)}$ gilt wieder die Gl. (16).

In ähnlicher Weise erhält man die Lösung von $\sigma_x(t)$ für $\varepsilon_x = \varepsilon_{xa} = \text{const.} > 0$ bis $t_{(1)}$ und $\varepsilon_x = \varepsilon_{xb} = \text{const.} > 0$ für $t \geq t_{(1)}$. Wenn $\varepsilon_{xb} \geq \varepsilon_{xa}\left(1 - e^{-\frac{E_x t_{(1)}}{E_{x\infty}\tau_R}}\right) = \varepsilon_{x(1)}$ bekommt man nach dem Superpositionsprinzip

$$\sigma_x(t) = E_{x\infty}\varepsilon_{xb} + (E_x - E_{x\infty})\left[\varepsilon_{xa} e^{-\frac{E_x t}{E_{x\infty}\tau_R}} + (\varepsilon_{xb} - \varepsilon_{x(1)}) e^{-\frac{E_x}{E_{x\infty}}\frac{t - t_{(1)}}{\tau_R}}\right] \qquad (29)$$

Bei $\varepsilon_{xb} = \varepsilon_{x(1)}$ hat man $\sigma_x = \text{const.}$ für $t > t_{(1)}$. Für $\varepsilon_{x(1)} > \varepsilon_{xb} \geq -\varepsilon_{x(1)}\frac{E'_{x\infty} - E_{x\infty}}{E_x - E_{x\infty}}$ findet man

$$\sigma_x(t) = E_{x\infty}\varepsilon_{x(1)} - (\varepsilon_{x(1)} - \varepsilon_{xb})\left[E'_{x\infty} + (E_x - E'_{x\infty})e^{-\frac{E_x}{E'_{x\infty}}\frac{t - t_{(1)}}{\tau_R}}\right] \qquad (30)$$

Offensichtlich ist dann die Spannung nicht reversibel. Wenn die Formänderung in $t_{(1)}$ noch mehr sinkt, gilt (30) nur bis $t_{(2)}$, wobei $(E_x - E'_{x\infty})(\varepsilon_{x(1)} - \varepsilon_{xb})\left(1 - \exp\frac{E_x}{E_{x\infty}}\frac{t_{(2)} - t_{(1)}}{\tau_R}\right) = (E_x - E_{x\infty})\varepsilon_{x(1)}$, und $\varepsilon_x(t)$ verläuft wieder nach (16).

$$(E'^{-1}_{x\infty} - E_x^{-1})(\sigma_{x(1)} - \sigma_{xb})\left(1 - e^{-\frac{(t_{(2)} - t_{(1)})}{\tau_R'}}\right) = (E_{x\infty}^{-1} - E_x^{-1})\varepsilon_{x(1)}$$

Für den mehrachsigen Spannungszustand sind die Gleichungen (18-19) mit mehreren Ungleichheiten

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\varepsilon_x - \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\mu_y \sigma_y}{E_y}\right| \gtreqless 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left|\gamma_{xy} - \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}\right| \gtreqless 0 \qquad (31)$$

gültig. Beim Sinken der Belastung in der Konstruktion müssen alle Bedingungen nicht gleichzeitig überschritten werden. Genau gesehen können Zeitabschnitte kommen, in welchen z. B. für y und zx noch die Gl. (18-19) gelten, jedoch für ε_x, γ_{xy} usw. gelten schon die Gleichungen mit geänderten Koeffizienten in Form von (31).

Die mathematische Ermittlung nach Modell im Bild 3 genügt nur für ein beschränktes Zeitintervall. Für ein längeres Zeitintervall ist es nötig, ein aus mehr als drei Elementen bestehendes Modell anzuwenden, welches zur Gleichung höherer Ordnung führt. Um die Nichtumkehrbarkeit der Formänderungen zu ermitteln, kann man im Modell zusätzliche Sprungfedern und Dämpfer mit Hilfe eines oder mehrerer Schnäpper einschalten. Wenn in einfachster Weise für langzeitige Formänderungen nur ein Schnäpper erwogen wird, kann man die Gültigkeit der Gl. (20-21) wieder mit Bedingung (31) begrenzen. Wenn im Zeitpunkt $t_{(1)}$ diese Bedingung überschritten wird, muß man die Gleichungen

$$\underline{E}_p'\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\varepsilon_x - \varepsilon_{x(1)}\right) = \sigma_x - \sigma_{x(1)} \qquad (32)$$

$$\underline{E}_p'\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{b_0' + b_1' \frac{\partial}{\partial t} + \cdots + b_m'\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m}{a_0' + a_1' \frac{\partial}{\partial t} + \cdots + a_n'\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n} \qquad (33)$$

mit anderen Koeffizienten nehmen. Die entsprechende Bedingung ist die umgekehrte Ungleichheit wie (31). Wenn sie wieder überschritten wird, gilt von neuem die Gl. (20-21).

Für die Praxis jedoch liegt der bequemste Weg auch hier, das zu lange Intervall auf kürzere zu verteilen, die man in verschiedene Gleichungen der Form (16) bzw. (25), mit einem entsprechendem Modell nach Bild 3, bringt.

Die Nichtumkehrbarkeit der Formänderungen konnte man auch ermitteln mit Hilfe der Einschaltung von bisher benutzten nichtlinearen Elementen, wie z. B. von zwei zusammengedrückten Reibplatten und von zwei Stäben mit gegenseitig, bei gewissem einfallenden Zähnen. Die einfachsten Fälle von zunehmender Spannung oder Formänderung würden dann aber nicht linear sein. Der Vorteil des vom Autor vorgeschlagenen Verfahrens der Einschaltung eines Schnäppers liegt darin, daß die wichtigsten Fälle des Beanspruchungsverlaufes als linear behandelt werden können.

Literatur

(1) Bazant Z.P., Mathematische Ermittlung der rheologischen Eigenschaften von glasfaserverstärkten Kunststoffen mit Rücksicht auf die Berechnung der Konstruktionen, Plaste und Kautschuk, 1965 (im Druck)

(2) Bazant Z.P., Langzeitige Formänderungen von glasfaserverstärkten Kunststoffen und ihre mathematische Formulierung (tschechisch), Forschungsbericht vom Bauforschungsinstitut der T.H. Prag, 1963

(3) Bland D. R. The theory of linear viscoelasticity, Pergamon Press, Oxford 1960

(4) Freudenthal A.M., Geiringer H., The mathematical theories of the inelastic continuum, Handbuch der Physik, Band VI, Springer, Berlin 1958

(5) Nowacki W., Theorie des Kriechens /polnisch/, Arkady, Warszawa 1963

(6) Rabinovitsch A.L., Turazian A.V., Der Einfluß von Deformationsgeschwindigkeit auf die Deformationsgroße bei orthotropen GFK (russisch), Diklady A. N. SSR, 1963, No. 6, S. 1350

(7) Reiner M., Rheology, Handbuch der Physik, Band VI, Springer, Berlin

(8) Skupin L., Die Rheologie von GFK /tschechisch/, Kaucuk a plasticke hmoty 1962, S. 30, Nr. 9