006

Inž. ZDENĚK P. BAŽANT, Dopravoprojekt Praha

DT 624.072.33 624.078

Výpočet příčinkových čar sdružených rámů s vloženými klouby

Analogie s řešením spojitých nosníků. Stupeň přetvárné neurčitosti menší než statické při řešení upravenou deformační metodou. Základ řešení staticky neurčitý konzolový prvek tvaru T, na koncích konzol kyvně podepřený. Závislost posouvajících sil v kloubech na jejich průhybech. Kloubová rovnice. Rovnice rozevřeného kloubu. Koeficienty přenosu průhybů kloubů. Příčinkové pořadnice v kloubech a mezilehlé příčinkové pořadnice. Výhodnost metody.

Sdružené rámy s vloženými vodorovně posuvnými klouby jsou zajímavým konstrukčním systémem, užívaným dnes často pro svou výhodnost u letmo betonovaných nebo montovaných mostů z předpjatého betonu. Otázka vhodných a rychlých způsobů jejich výpočtu se právě dnes stává u nás velice aktuální, neboť tento konstrukční systém je např. zvolen pro významné projekty mostu přes nuselské údolí v Praze nebo mostu přes Vltavu v Praze pod Bulovkou, tvořícího součást řešení pražského železničního uzlu.

Statické schéma konstrukce je na obr. 1 (⊙ značí vodorovně posuvný kloub), kde rám je ukončen konzolami posuvně uloženými na opěrách. Rám může být též ukončen konzolou vetknutou do opěry (obr. 2) nebo volnou (obr. 3). Konstrukce je tvořena lineárně seřazenými prvky tvaru T, spojenými v kloubech jednoduchými vazbami. Podobnou statickou skladbu má též spojitý nosník, který je tvořen řadou prostě uložených nosníků spojených jednoduchými vazbami. Z této analogie plyne, že uvažované rámy lze řešit obdobnými metodami jako spojité nosníky.

Má-li rám tohoto typu n pilířů (obr. 1), tj. $(n + 1)$ polí, je $(n + 1)$krát staticky neurčitý. Při řešení silovou metodou je vhodné volit základní soustavu podle obr. 4, se staticky neurčitými posouvajícími silami v kloubech $T_0 \ldots T_n$. Řešení silovou metodou upravil J. Courbon podobným způsobem jako řešení spojitého nosníků třímomentovými rovnicemi, neboť jeho podporovým momentům odpovídají zde posouvající síly kloubů [1]. Ukázal dále, že u nezatížených polí lze posouvající síly kloubů počítat bez řešení systému tříčlenných rovnic přímým rekurentním způsobem, podobně jako u spojitých nosníků při řešení základními body pomocí koeficientů přestupu.

Upravená deformační metoda

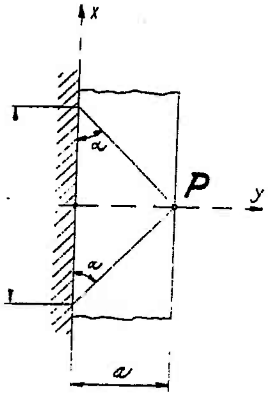
V tomto pojednání ukážeme, že stejně, jako existuje obdoba řešení třímomentovými rovnicemi, existuje zde též obdoba duálního řešení spojitých nosníků rovnicemi tří pootočení. Dokážeme dále, že též toto řešení je možno upravit rekurentním způsobem pomocí tzv. koeficientů přenosu průhybů kloubů a že tedy není nutno řešit systém tříčlenných rovnic. Příčinkové čáry posouvajících sil v kloubech od svislého zatížení (pro vodorovné zatížení je konstrukce staticky určitá) lze pak velmi rychle počítat jako ohybové čáry od jednotkového rozevření kloubu. Pro naše řešení užijeme speciálně upravené deformační metody, kterou je možno pokládat rovněž jako běžnou deformační metodu Ostenfeldovu za aplikaci deformační metody v obecném smyslu. U běžné deformační metody se zavádí ve styčnících vetknutí, čímž se konstrukce rozpadne na vetknuté pruty. Přetvárně neurčitými pak jsou posuny neb pootočení jejich konců, pro něž se sestavují rovnice rovnováhy.

U uvažovaných rámů je vhodné zavést další kyvné podpory v kloubech (obr. 5). Tím se konstrukce rozpadne na základní staticky neurčité konzolové prvky tvaru T, kyvně podepřené na koncích konzol (obr. 8). Přetvárně neurčitými pak budou svislé průhyby kloubů (obr. 6). Vidíme, že jich u rámu na obr. 1 je celkem $(n - 1)$. Konstrukce je tedy $(n - 1)$krát přetvárně neurčitá, což je o dva stupně méně než dává neurčitost statická. Podmínečných rovnic je proto o dvě méně, rovněž koeficientů přenosu při rekurentním řešení, což přináší početní výhodu. U méně častých rámů podle obr. 2 nebo 3 je stupeň statické a přetvárné neurčitosti stejný.

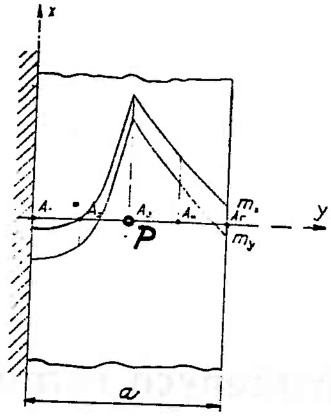
Konzolový prvek tvaru T

Napřed vypočteme pořadnice ohybové čáry konzol volného staticky určitého i-tého prvku tvaru T při zatížení břemenem $P = 1$ na konci jednak levé, jednak pravé konzoly (obr. 7). Zároveň obdržíme průhyby konců konzol a_i, b_i, c_i, charakterisující pružné vlastnosti prvku

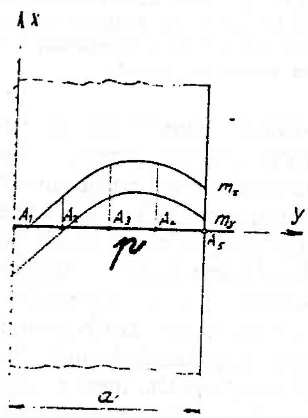
$$a_i = l'^2_i \int_0^{h_i} \frac{dy}{EJ} + \int_0^{l'_i} x^2 \frac{dx}{EJ}$$



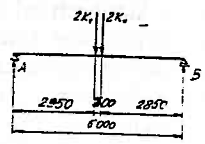
Obr. 5. Roznášecí úhel α a spolupůsobící šířka b_s



Obr. 6. Průběh momentů v řezu $x = 0$ při zatížení osamělým břemenem P v bodě A_3 (podmínka nulového momentu v bodě A_5 je splněna jen přibližně)



Obr. 7. Průběh momentů v řezu $x = 0$ při zatížení tohoto řezu přímkovým rovnoměrným zatížením p (vlevo)



Obr. 8. Nosník dráhy kladkostroje

ːe C_n jsou koeficienty různé pro jednotlivé zatěžovací ıpady. Protože rovnice (8) vyhovuje všem okrajovým ıdmínkám kromě podmínce nulového ohybového mo- ːntu na volném okraji, jsou v [4] vypočteny koeficienty tak, že této podmínce je vyhověno alespoň pro $y = a$. ꞏ praktický výpočet toto omezení stačí, neboť moment ve směru osy x rychle vyznívá. Koeficienty C_n jsou ːdeny v tab. I.

Měrné momenty v libovolném bodě řezu $x = 0$ se určí ovnic

$$m_x = -\mathrm{D} \sum_n C_n \left[(1 + \mu) \cos \frac{n\pi y}{a} - 1\right] \tag{9}$$

$$m_y = -\mathrm{D} \sum_n C_n \left[(1 + \mu) \cos \frac{n\pi y}{a} - \mu\right] \tag{10}$$

$$m_{xy} = 0 \tag{11}$$

ːo měrné momenty m_x, m_y, m_{xy} jsou vyčísleny v bodech $(0, 0)$, $A_2\left(0, \frac{a}{4}\right)$, $A_3\left(0, \frac{a}{2}\right)$, $A_4\left(0, \frac{3a}{4}\right)$, $A_5\,(0, a)$, ːé leží v řezu $x = 0$. Protože v ostatních řezech jsou vý- ná napětí vesměs menší, nejsou vyčíslena. Velikosti těch- ıomentů v bodech A_1 až A_5 jsou sestaveny v tab. II, kde všechny hodnoty vyčísleny pro $P = 1000$ kg, $p =$:00 kg/cm, $\mu = 0{,}3$ a pro $E = 2\,100\,000$ kg/cm². ɔěh těchto momentů m_x, m_y v řezu $x = 0$ je vyznačen ·r. 6 a 7.

ːrotože max. měrné momenty max. m_x a max. m_y vzni- v bodě $A_3\left(0, \frac{a}{2}\right)$ současně pro oba druhy zatížení, obvykle vyčíslit napětí σ_x a σ_y pouze v tomto bodě A_3. Velikost normálných napětí v krajních vláknech desky je přitom dána vztahem

$$\sigma_i = \frac{6 \,.\, m_i}{h^2} \tag{12}$$

Příklad

Posouzení pojezdové dráhy elektrického kladkostroje typu L III - 15:

vlastní váha kladkostroje	G	$= 320$ kg
max. břemeno	Q	$= 1500$ kg
rozvor pojezdných kol	a	$= 200$ mm
rozpětí dráhy	l	$= 6{,}00$ m
nosník dráhy	I	24

Napětí od ohybu celého nosníku:

Kolový tlak

$$\psi K_1 = \frac{1}{4}\, 1{,}08 (320 + 1500) = 492 \text{ kg}$$

kde $\psi = 1{,}08$ je vyrovnávací součinitel pro I. tř. jeřábů (ČSN 73 1310 - 1958).

$$A = \frac{2 \,.\, 492\,(3{,}05 + 2{,}85)}{6{,}00} = 968 \text{ kg}$$

$$B = \frac{2 \,.\, 492\,(2{,}95 + 3{,}15)}{6{,}00} = 1000 \text{ kg} \quad \text{(obr. 8)}$$

$$\mathrm{M} = 968 \,.\, 2{,}95 = 2860 \text{ kgm}$$

$$W_x = 354 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_o = \frac{286\,000}{354} = 808 \text{ kg cm}^2$$

Napětí v krajních vláknech dolní pásnice od lokálního zatížení kolovým tlakem jsme pro názornost vyčíslili pro všechny tři zatěžovací případy.

a) Zatěžování osamělým břemenem na konci pásnice

$$M_i = 492 \,.\, 5{,}3 = 2610 \text{ kgcm}$$

$$b_s = 2 \,.\, 5{,}3 = 10{,}6 \text{ cm}$$

$$W_s = \frac{1}{6} \,.\, 10{,}6 \,.\, 1{,}31^2 = 3{,}03 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_{La)} = \frac{2610}{3{,}03} = 861 \text{ kg cm}^2$$

$$\sigma_{sa)} = \sqrt{808^2 + 861^2 - 808 \,.\, 861} = 835 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Zatěžování osamělým břemenem na konci pásnice

Měrné ohybové momenty podle tab. II, v bodě A_3, kde vzniká současné maximum pro oba směry x a y:

$$m_x = 0{,}492 \,.\, 392{,}0 = 193 \text{ kgcm/cm}$$

$$m_y = 0{,}492 \,.\, 317{,}5 = 156 \text{ kgcm/cm}$$

$$\sigma_{Lx} = \frac{6 \,.\, 193}{1{,}31^2} = 675 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{Ly} = \frac{6 \,.\, 156}{1{,}31^2} = 546 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_x' = 808 + 675 = 1483 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{sb)} = \sqrt{1483^2 + 546^2 - 1483 \,.\, 546} = 1300 \text{ kg cm}^2$$

c) Rovnoměrné zatížení po celé šířce pásnice

Měrné ohybové momenty podle tab. II v bodě A_3, kde vzniká maximum pro oba směry x a y:

$$a = 5{,}3 \text{ cm}$$

$$m_x = 20{,}5 \,.\, 5{,}3 = 109 \text{ kgcm/cm}$$

$$b_i = l'_i \, l''_i \int_0^{h_i} \frac{dy}{EJ} \tag{1}$$

$$c_i = l''^2_i \int_0^{h_i} \frac{dy}{EJ} + \int_0^{l''_i} x^2 \frac{dx}{EJ}$$

Zde značí (obr. 7) l'_i, l''_i délky konzol a x vzdálenost jejich průřezu od kloubu, h_i výšku pilíře a y vzdálenost jeho průřezu od paty, J moment setrvačnosti a E modul pružnosti. Čísla a_i, b_i, c_i jsou kladná.

Uvažujeme dále staticky neurčitý prvek tvaru T, kyvně podepřený na koncích konzol (obr. 8). Určeme velikost reakcí A_i a B'_i na koncích konzol při svislém průhybu levé konzoly $v_{i-1} = 1$ ($v_i = 0$) a velikost reakcí B'', C_i na koncích konzol při průhybu pravé konzoly $v_i = 1$ ($v_{i-1} = 0$). Řešením dvakrát staticky neurčité soustavy obdržíme

$$A_i = \alpha_i \, v_{i-1}, \qquad B'_i = \beta_i \, v_{i-1}$$
$$C_i = \gamma_i \, v_i, \qquad B''_i = \beta_i \, v_i \tag{2}$$

kde je

$$\alpha_i = \frac{c_i}{a_i \, c_i - b_i^2}, \; \beta_i = \frac{b_i}{a_i \, c_i - b_i^2},$$

$$\gamma_i = \frac{a_i}{a_i \, c_i - b_i^2} \tag{3}$$

Přitom platí $a_i c_i - b_i^2 > 0$, $\alpha_i \gamma_i - \beta_i^2 = 1$ a čísla α_i, β_i, γ_i jsou kladná.

Kloubová rovnice

Nechť dva za sebou jdoucí nezatížené prvky i a $i+1$ tvaru T mají v kloubech průhyby v_{i-1}, v_i, v_{i+1} (obr. 9). V kloubu i působí na prvek i posouvající síla T_i' a na prvek $_{i+1}$ síla T_i'', které se podle (2) rovnají

$$T'_i = -\beta_i \, v_{i-1} - \gamma_i \, v_i, \quad T''_i = \alpha_{i+1} \, v_i - \beta_{i+1} \, v_{i+1} \tag{4}$$

Podmínka rovnováhy v kloubu je $T''_i - T'_i = 0$ neboli

$$\beta_i \, v_{i-1} + (\gamma_i + \alpha_{i+1}) v_i + \beta_{i+1} \, v_{i+1} = 0 \tag{5}$$

což je rovnice rovnováhy kloubu neboli kloubová, která uvádí ve vzájemný vztah tři za sebou jdoucí průhyby kloubů v nezatížených polích. Svou stavbou i významem je obdobná rovnici tří za sebou jdoucích podporových pootočení spojitého nosníku. Je duální k rovnici tří za sebou jdoucích posouvajících sil kloubů, kterou uvádí Courbon [1], stejně jako rovnice tří pootočení u spojitého nosníku je duální ke třímomentové rovnici.

Příčinkové čáry posouvajících sil T_k kloubů, které jsou základní a z nichž lze ostatní odvodit, vypočteme jako ohybové čáry od jednotkového rozevření kloubu k (pole nejsou zatížena), čímž rozumíme svislé oddálení konců konzol v kloubu o jednotku (obr. 10). Též v tomto kloubu musí být posouvající síly v rovnováze. Označíme-li průhyb konzoly $(k+1)$tého prvku v kloubu k jako v_k, pak se průhyb konzoly k-tého prvku rovná $v_k - 1$. Na konzolu k-tého prvku zde pak působí posouvající síla T'_k

$$T'_k = -\beta_k \, v_{k-1} - \gamma_k \, (v_k - 1) \tag{6}$$

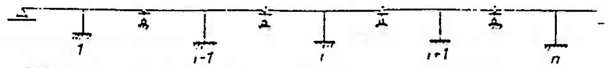
Rovnice rovnováhy kloubu k tedy je

$$\beta_k \, v_{k-1} + \gamma_k \, (v_k - 1) + \alpha_{k+1} \, v_k + \beta_{k+1} \, v_{k+1} = 0 \tag{7}$$

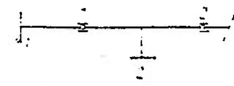
což je tzv. rovnice rozevřeného kloubu. V kloubové rovnici kloubu $k-1$ musíme za průhyb kloubu k též dosadit hodnotu $v_k - 1$.

Koeficienty přenosu průhybů

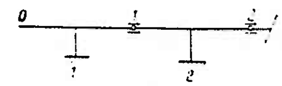
Sestavením kloubových rovnic dostaneme u rámů podle obr. 1 systém $n - 1$ tříčlenných lineárních rovnic pro



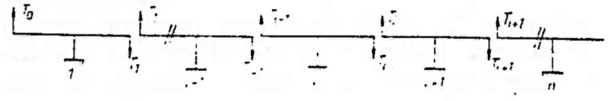
Obr. 1



Obr. 2



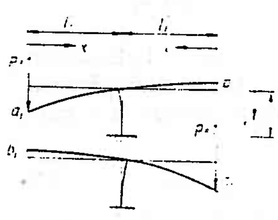
Obr. 3



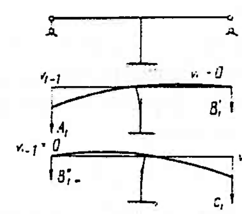
Obr. 4

Obr. 5

Obr. 6

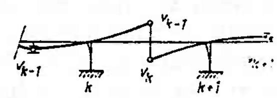


Obr. 7

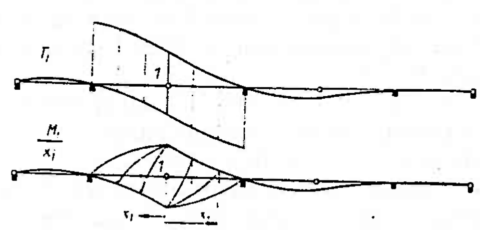


Obr. 8

Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11

...dnoty v_i, což jsou přímo hodnoty příčinkových pořad... Je-li rovnic málo, nejvýše dvě, řešíme je přímo. ...ážeme nyní, že při větším počtu rovnic je možné a vý...dnější vypočítat hodnoty v_i, aniž bychom řešili systém ...nic. Označme

$$\varrho_i = -\frac{v_{i-1}}{v_i}, \quad \varrho'_i = -\frac{v_i}{v_{i-1}}$$

...kloubové rovnice (5) pak plyne

$$\frac{\beta_i}{\varrho_i} = \alpha_i + \gamma_{i-1} - \beta_{i-1}\,\varrho_{i-1} \tag{8}$$

$$\frac{\beta_i}{\varrho'_i} = \gamma_i + \alpha_{i+1} - \beta_{i+1}\,\varrho'_{i+1}$$

...to rovnice vyjadřují rekurentní vztahy mezi hodnotami ... resp. ϱ'_i a můžeme je z nich tedy postupně vypočíst ... konců rámu. Vidíme, že jejich hodnoty jsou nezávislé ... hodnotách průhybů v_i. Hodnoty ϱ_i, resp. ϱ'_i nazveme ...eficienty přenosu průhybů doprava, resp. do...va (v nezatížených polích).

Je-li rám ukončen podle obr. 1, vycházíme při výpočtu ...eficientů přenosu z hodnoty $\varrho_1 = 0$ resp. $\varrho'_n = 0$. Je-li ...n ukončen vetknutou konzolou podle obr. 2, můžeme ...ajní vetknutou konzolu pokládat za prvek T s absolutně ...hým pilířem a je pak $a_1 = b_1 = 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\gamma_1 = {}^1/c_1$ ...odtud $\varrho_1 = 0$, resp. $\varrho'_n = 0$. Je-li rám ukončen volnou ...podepřenou konzolou podle obr. 3, platí $\gamma_1 = {}^1/c_1$, ... $= 0$ a odtud $\varrho_1 = {}^{b_1}c_1$, resp. $\varrho'_n = {}^{b_n}/_{a_n}$.

Příčinkové pořadnice posouvající síly kloubu k

Zavedeme-li v rovnici (7) rozevřeného kloubu hodnoty ...eficientů přenosu, dostaneme hodnoty příčinkových po...dnic posouvající síly kloubu k jako hodnotu v_k vpravo ... kloubu a $v_k - 1$ vlevo od kloubu

$$= \frac{\dfrac{\gamma_k}{\beta_k} - \varrho_k}{\dfrac{1}{\varrho'_k} - \varrho_k}, \quad v_k - 1 = -\frac{\dfrac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}} - \varrho'_{k+1}}{\dfrac{1}{\varrho_{k+1}} - \varrho'_{k+1}} \tag{9}$$

...itom platí $1 > v_k > 0$, $0 > v_k - 1 > -1$. Z těchto ...dnot vypočteme postupně pomocí koeficientů přenosu ...leva, resp. doprava ostatní příčinkové pořadnice v mís...ch kloubů z rovnic

$$v_{i-1} = -\varrho_i\, v_i, \qquad v_i = -\varrho'_i\, v_{i-1} \tag{10}$$

...e prvá rovnice platí vlevo od kloubu k a druhá vpravo ... k.

Mezilehlé pořadnice příčinkové čáry na konzolách do...neme tak, že z rovnic (4) a (6) vypočteme zatížení na ...ncích konzol prvků tvaru T, odpovídající vypočteným ...dnotám v_i. Jimi pak vynásobíme předem vypočtené ...dnoty ohybové čáry konzol prvku tvaru T pro zatížení ...dnotkou na konci levé nebo pravé konzoly a obě hodnoty ...k pro každý prvek sečteme. Odvodit příčinkové čáry ...tatních statických veličin je již možno známými způsoby. ...ipomeňme jen, že je výhodné, jak ukázal Courbon [1], ...ísto příčinkových čar momentů M počítat příčinkové ...ry hodnot M/x, kde x je vzdálenost bodu, pro jehož ...oment hledáme příčinkovou čáru, od kloubu. Všechny ...íčinkové čáry jednoho pole lze pak též kreslit do jednoho ...rázku (obr. 11).

Při výpočtu příčinkové čáry průhybu kloubu k dosadíme ... $= 1$ a postupujeme dále zcela obdobně.

Postup výpočtu je tedy tento:

1. Vypočteme ohybové čáry konzol prvků T pro zatížení ...dnotkou na konci jednak levé, jednak pravé konzoly. Zároveň obdržíme hodnoty a_i, b_i, c_i.
2. Určíme α_i, β_i, γ_i pro staticky neurčitý prvek T.
3. Při dvou přetvárně neurčitých sestavíme systém dvou rovnic a vyřešíme je. Při větším počtu přetvárně neurčitých určíme postupně koeficienty přenosu a z nich postupně hodnoty příčinkových pořadnic v kloubech.
4. Vypočteme posouvající síly v kloubech a jejich pomocí z ohybových čar konzol při zatížení jednotkou mezilehlé hodnoty pořadnic.

Závěrem můžeme říci, že uvedené řešení je výhodné hlavně u rámů, jejichž krajní konzoly jsou uloženy posuvně na opěry (obr. 1), neboť tato konstrukce je o dvakrát méně přetvárná než staticky neurčitá. Rovnic je zde tedy o dvě méně (u rámu se třemi pilíři místo čtyř jen dvě a se dvěma pilíři místo tří jen jedna). Při rámu o mnoha polích je značnou výhodou to, že systém rovnic není nutno řešit a je možno počítat přímo pomocí koeficientů přestupu posouvajících sil podle Courbona. Uvedený postup umožňuje nejrychlejším způsobem vypočíst příčinkové pořadnice v kloubech, a to i u rámů podle obr. 2 nebo 3. Uveďme konkrétně, že se při projektu železničního mostu přes Vltavu v Praze pod Bulovkou, který má tvar podle obr. 1 se třemi pilíři, ukázal uvedený postup pro výpočet příčinkových pořadnic v kloubech asi dvakrát rychlejší a pro výpočet mezilehlých příčinkových pořadnic asi o 10 % rychlejší než podle Courbona.

Toto řešení a řešení Courbonovo jsou vzájemně duální a obě jsou obdobou jim odpovídajících řešení spojitých nosníků.

LITERATURA

[1] J. Courbon: Calcul des ponts à poutres consoles réunies par des articulations, Mémoires de l'A. I. P. C. 1957, vol. XVII, str. 9, Curych

[2] O. Novák: Příspěvek k řešení rámů s vloženými klouby, Inženýrské stavby č. 1/1960.