

## L'instabilité d'un milieu continu et la résistance en compression

Z. P. BAŽANT <sup>(1)</sup>

### RÉSUMÉ

On obtient dans cet article des équations différentielles avec les conditions aux limites pour l'instabilité générale d'un corps élastique (ou viscoélastique) sous contraintes initiales. Comme critère général de l'instabilité on adopte le critère énergétique de Pearson [11] dont on donne aussi une déduction simple. Les équations sont écrites en coordonnées des points à l'état initial, avant le changement de déformation. Elles sont différentes des équations de Biot [2]. Pour les équations de l'instabilité on donne certaines solutions analytiques. On trouve que les charges critiques pour l'instabilité interne doivent être de l'ordre des modules élastiques. Elles diminuent fortement avec la diminution des modules transversaux d'un matériau orthotrope. Il semble que l'on puisse expliquer de cette façon la rupture par compression par délamination des plaques et voiles en plastiques stratifiés renforcés par du tissu de verre — et sa dépendance de la courbure de voiles — et aussi, dans une certaine mesure, la prolongation des fissures longitudinales dans les bétons sous compression.

La rupture par compression constitue un phénomène beaucoup plus compliqué que la rupture par traction ou par cisaillement. Il est bien évident que la compression elle-même ne peut pas produire la rupture et que cette dernière ne peut être causée que par les contraintes secondaires de traction ou de cisaillement accompagnant la sollicitation par les forces de compression. Comme pour les éléments uni- et bi-dimensionnels (barres, plaques, coques) c'est surtout l'instabilité transversale qui est décisive, le même phénomène se présente pour expliquer l'apparition de fissures parallèles aux contraintes de compression dans un matériau comprimé.

[1] CSc., Ingénieur de recherche à l'Institut de Construction de l'École Polytechnique de Prague, Stagiaire à la Direction Générale de la Recherche U.T.I.B.T.P.

### SUMMARY

*In this article we obtain differential equations with the limit conditions for the general instability of an elastic (or viscoelastic) body under initial stresses. Pearson's energy criterion [11], of which a simple deduction is also given, is adopted as a basis of analysis. The equations are written in coordinates of the points at the initial state, before the deformation change. They are different from the Biot equations [2]. For the instability equations certain analytical solutions are given. We find that the critical loads for the internal instability must be of the order of the elastic moduli. They diminish markedly with the diminution of the transverse moduli of an orthotropic material. It seems that it is possible to explain in this way the failure by compression by delamination of the plates and shells of stratified plastic reinforced by glass fibre — and its dependence on the curvature of the shells — and also, to a certain extent, the prolongation of the longitudinal cracks in concretes under compression.*

En particulier, c'est par ce phénomène que très probablement s'explique la délamination des couches dans les plaques en plastiques renforcés par du tissu de verre ou des couches extérieures dans les plaques sandwich comprimées, et aussi, au moins dans une certaine mesure, la rupture par compression (en incluant la zone comprimée d'une poutre fléchie) des bétons hydrauliques, du verre et surtout des roches orthotropes.

Actuellement, seul le flambement transversal des pièces à une ou deux dimensions est bien connu. Le problème général de l'instabilité d'un corps élastique a été abordé jusqu'à présent par bien des chercheurs, en commençant par BRYAN en 1889 [11]. Cependant, le traitement de ce problème n'est pas unique et plusieurs théories ont été proposées, parmi lesquelles nous notons surtout trois voies essentiellement différentes, celles de BIOT [1, 2], de NEUBER [9, 10, 3], et de PEARSON [11]. La méthode de PEARSON est adoptée actuellement par

la plupart des chercheurs, qui introduisent des critères semblables, par exemple HILL [6], PRAGER [12], GREEN et ADKINS [5], TRUESDELL [14], tandis que la théorie de NEUBER et surtout celle de BIOT [2] ont été appliquées en outre à beaucoup de problèmes pratiques, essentiellement en géologie. L'absence d'unanimité jusqu'à présent dans les théories peut s'expliquer en principe :

1° Par les définitions différentes du tenseur de la déformation finie, sur laquelle s'effectue le travail des contraintes initiales [12]. La définition, que nous adoptons, est introduite à présent par la plupart des auteurs, tandis que BIOT utilise une autre définition.

2° Par un accès différent au problème, c'est-à-dire par une condition différente introduite comme critère de l'instabilité. On peut partir du critère énergétique, où l'on peut examiner directement l'existence d'un autre état voisin de l'équilibre. Nous adoptons ici le critère énergétique obtenu par PEARSON [11] comme fondamental, car il est accepté à présent par la plupart des chercheurs et rend possible une solution simple que nous montrerons.

Notons que les équations différentielles que nous obtiendrons sont différentes de celles de BIOT [2], ainsi que de NEUBER [9] ou NOVOZHILOV [10a]. On montrera que pour la théorie de BIOT cette différence est causée uniquement par une définition particulière du tenseur de la déformation finie, tandis que les théories de NEUBER ou de NOVOZHILOV sont en désaccord total avec notre théorie qui découle du critère de stabilité de PEARSON, généralement adopté. Toutes ces théories ainsi que la nôtre sont en accord avec la théorie du flambement des barres ou plaques. Cependant, si l'on considère le cisaillement (plaques sandwich), on se trouve en désaccord avec la théorie de BIOT ou de NOVOZHILOV.

### I. NOTATIONS PRINCIPALES ET LOI ÉLASTIQUE

$x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ou  $x, y, z$  = coordonnées cartésiennes des points à l'état de déformation initiale (état II);

$a_i$  = coordonnées des points avant la déformation initiale (état I),  $x_i = a_i + v_i$ ;

$u_i$  ou  $u, v, w$  = changements des déplacements par rapport à l'état déformé initial d'équilibre (état II);

$x'_i = x_i + u_i$  = coordonnées des points après les changements  $u_i$  (état III).

Le tenseur du changement fini de la déformation (de LAGRANGE) s'exprime, d'après la définition généralement adoptée, comme [12]

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad (1)$$

où

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1a)$$

est le tenseur de petit changement de la déformation,  $\varepsilon_x = \varepsilon_{11}$ ,  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_{12}$ ,  $e_x = e_{11}$ ,...

Dans (1) et (1a) ainsi que dans ce qui suit, nous utilisons toujours la notation  $u_{k,i} = \partial u_k / \partial x_i$  et la convention d'EINSTEIN (somme par rapport aux indices muets qui se répètent).

$\delta_{ij} = 1$  pour  $i = j$  et 0 pour  $i \neq j$  (symbole de KRONECKER).

$S_{ij}$  ou  $S_{xx}, S_{xy}, \dots$  = tenseur des contraintes initiales (à l'état II), qui correspondent à certaines déformations dues aux  $v_i$  (notons que la dépendance entre  $S_{ij}$  et  $v_{i,j}$  ne doit pas être élastique);

$\sigma_{ij}$  ou  $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots$  = tenseur du changement des contraintes produites par les petits changements des déformations  $e_{ij}$  (en principe il est défini par l'expression (4) pour le travail de la déformation) et liées avec eux par les relations linéaires :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (2)$$

ce qui est la loi élastique linéaire anisotrope ( $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl}$ ,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) pour les changements de déformation.

$E, G, \nu$  = module de YOUNG, module de cisaillement et coefficient de POISSON pour un matériau isotrope. Pour le matériau orthotrope nous introduisons en particulier la loi d'élasticité :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_{xx} e_x + E_{xy} e_y + E_{xz} e_z, \dots \\ \tau_{xy} &= 2 \sigma_{xy} e_{xy}, \dots \end{aligned} \quad (2a)$$

$P_i$  ou  $P_x, \dots$  = charges (par rapport aux  $x_i$ ) données à la surface  $S$  (charge « morte » qui ne change ni en direction ni en grandeur pendant la déformation, ce qui n'est pas le cas pour la pression hydraulique ou un appui élastique);

$F_i$  = forces (charges) de volume données (par rapport à  $x_i$ );

$V$  = volume (en état II),  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ ;

$S$  = surface (en état II);

$n_i$  = vecteur unité de la normale de surface  $S$  (en état II).

### II. LE CRITÈRE ÉNERGÉTIQUE FONDAMENTAL DE LA STABILITÉ

Nous démontrons d'abord comment on peut directement obtenir le critère de stabilité pour de petites variations de la déformation, ce qui est plus expressif que le procédé général donné par PEARSON.

Le critère énergétique fondamental est le suivant [13] : la déformation est stable si pour tous les petits déplacements  $u_i$  l'augmentation  $\Delta U$  de l'énergie potentielle des efforts intérieurs du corps est plus grande que le travail  $\Delta W$  consommé par les charges extérieures ou bien si le changement  $\Delta(U - W)$  de l'énergie potentielle totale ( $U - W$ ) est positif, à savoir :

$$\Delta U - \Delta W > 0 \quad (3)$$

tandis que la première variation  $\delta U - \delta V$ , à cause de l'équilibre initial, est nulle.

Le travail de la petite déformation pour l'unité de volume, exprimé exactement jusqu'aux termes du second ordre en  $u_{i,j}$  est :

$$S_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} \quad (4)$$

ou bien, en séparant les termes du second ordre :

$$S_{ij} e_{ij} + \left[ S_{ij} (\varepsilon_{ij} - e_{ij}) + \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \right] \quad (4a)$$

Pour le travail de  $S_{ij}$  nous sommes obligés de considérer ici la déformation finie exprimée exactement jusqu'aux termes de second ordre en  $u_{i,j}$ , même si les déplacements  $u_i$  sont petits, parce que  $\sigma_{ij}$  est petit

par rapport à  $S_{ij}$ , alors que le terme  $\sigma_{ij} e_{ij}$  est de second ordre en  $u_{i,j}$ . Donc nous avons :

$$\Delta U = \int_{(V)} S_{ij} e_{ij} dV + \int_{(V)} S_{ij} (\varepsilon_{ij} - e_{ij}) dV + \int_{(V)} \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV. \quad (4b)$$

Dans cette expression la première intégrale peut être transformée, compte tenu de la symétrie  $S_{ij} = S_{ji}$ , de la façon suivante :

$$\int_{(V)} S_{ij} e_{ij} dV = \int_{(V)} S_{ij} u_{i,j} dV = \quad (5)$$

$$= - \int_{(V)} S_{i,j} u_i dV + \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial x_j} (S_{ij} u_i) dV = - \int_{(V)} S_{i,j} u_i dV + \int_{(S)} n_j S_{ij} u_i dV, \quad (6)$$

où, pour obtenir la dernière expression, on a transformé l'intégrale de volume  $V$  en une intégrale de surface  $S$  d'après le théorème de GAUSS [12]. La déformation initiale est considérée *a priori* en équilibre, donc :

$$S_{i,j} + F_i = 0 \quad (\text{en tout point}) \quad (7)$$

$$n_j S_{ij} = P_i \quad (\text{à la surface}). \quad (8)$$

Nous considérons  $u_i$  compatible avec les conditions à la surface.

Par substitution dans (6) nous obtenons :

$$\int_{(V)} S_{ij} e_{ij} dV = \int_{(V)} F_i u_i dV + \int_{(S)} P_i u_i dS = \Delta W \quad (9)$$

ce qui représente évidemment le travail absorbé par les charges extérieures de surface et de volume  $P_i$  et  $F_i$ , dont la grandeur et la direction sont invariables pendant le changement  $u_i$  (charges « mortes »). (La signification physique de l'égalité de (5) et de (9) est que le travail des charges extérieures sur les petits changements de déplacements est égal au travail des efforts internes sur les petits changements (1a) des déformations, ce qui résulte aussi directement du principe des travaux virtuels).

Si nous substituons maintenant (9) dans (4b), nous obtenons finalement la condition nécessaire de la stabilité sous la forme suivante :

$$\Delta U - \Delta W = U_1 + U_0 > 0 \quad (10)$$

où

$$U_1 = \int_{(V)} \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV \quad (11)$$

$$U_0 = \int_{(V)} S_{ij} (\varepsilon_{ij} - e_{ij}) dV. \quad (12)$$

Ce critère a été obtenu par PEARSON [11, 12] (et plus tard par HILL [6]), mais sous une forme moins générale il a déjà été présenté en 1903 par HADAMARD ([5a], éq. VI. 18 et VI. 20 [14]) dans une étude des ondes élastiques.

### III. CONDITION AUX VARIATIONS DE L'INSTABILITÉ

Certaines contraintes initiales  $S_{ij}^0$  étant données, le problème se pose de savoir quel est le multiplicateur admissible pour que l'état des contraintes  $\mu S_{ij}^0$  soit stable. Remplaçons  $S_{ij}$  dans (12) par  $S_{ij}^0$  et  $U_0$  par  $\mu U_0^0$ . La condition est alors que :

$$U_1 + \mu U_0^0 > 0 \quad (13)$$

ou

$$\mu > -U_1/U_0^0.$$

La valeur minimale critique de  $\mu$  est :

$$\mu_{\text{crit.}} = \min (-U_1/U_0^0).$$

La condition de minimum est que la variation de  $U_1/U_0^0$  soit nulle. Or :

$$\delta \left( \frac{U_1}{U_0^0} \right) = \frac{U_0^0 \delta U_1 - U_1 \delta U_0^0}{U_0^{02}} = \frac{\delta U_1 + \mu_{\text{crit.}} \delta U_0^0}{U_0^0}$$

ou

$$\delta U_1 + \mu_{\text{crit.}} \delta U_0^0 = \delta (U_1 + \mu_{\text{crit.}} U_0^0) = 0.$$

Donc la condition nécessaire de l'instabilité est :

$$\boxed{\delta (U_1 + U_0) = 0} \quad (14)$$

Remarquons que  $\delta(\Delta U - \Delta W)$  ou bien  $\delta^2(U - W) = 0$ , ce qui est en accord avec le fait que la valeur de l'énergie totale  $(U - W)$  n'atteint pas le minimum local pour le cas de l'instabilité.

### IV. CONDITIONS D'ÉQUILIBRE INSTABLE EXPRIMÉES EN ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

On peut considérer l'expression  $U_1 + U_0$  comme une fonctionnelle des fonctions  $u_i(x_j)$ . La détermination de  $u_i(x_j)$  donnant la valeur extrême de ce fonctionnel représente un problème variationnel dans l'espace aux valeurs libres aux limites. Soient les expressions dans l'intégrale (11) ou (12) notées  $J_1$  et  $J_0$ ,  $J_1 + J_0 = J$ . Transformons la condition du minimum de la façon suivante (compte tenu de ce que  $\delta J/\delta u_i = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \delta \int_{(V)} J(u_{i,j}) dV &= \int_{(V)} \frac{\delta J}{\delta u_{i,j}} \delta(u_{i,j}) dV = \\ &= \int_{(V)} \frac{\delta J}{\delta u_{i,j}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) dV = \\ &= - \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta J}{\delta u_{i,j}} \right) \delta u_i dV + \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta J}{\delta u_{i,j}} \right) \delta u_i dV = \\ &= - \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta J}{\delta u_{i,j}} \right) \delta u_i dV + \int_{(S)} n_j \frac{\delta J}{\delta u_{i,j}} \delta u_i dS = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

où nous avons changé l'ordre de variation  $\delta$  avec l'intégration ou avec la dérivation  $\delta(u_{i,j}) = \partial(\delta u_i)/\partial x_j$  et nous avons utilisé le théorème de GAUSS [12]. Afin de satisfaire à la dernière relation pour une variation  $\delta u_i$  quelconque, il faut que dans tous les points :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta J}{\delta u_{i,j}} \right) = 0 \quad (16)$$

(conditions d'EULER), et qu'à la surface on ait :

$$n_j \frac{\delta J}{\delta u_{i,j}} = 0 \quad (17)$$

soit :

$$\delta u_i = 0. \quad (18)$$

Tenant compte de ce que  $S_{ij} = S_{ji}$ ,  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , on peut calculer :

$$\begin{aligned} \frac{\delta J_1}{\delta u_{i,j}} &= \frac{\delta J_1}{\delta e_{kl}} \frac{\delta e_{kl}}{\delta u_{i,j}} = \frac{\delta J_1}{\delta e_{ij}} = \frac{\partial}{\partial e_{ij}} \left( \frac{1}{2} C_{pqkl} e_{pq} e_{kl} \right) = \\ &= C_{ijkl} e_{kl} = \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_0}{\partial u_{i,j}} &= S_{pq} \frac{\partial (\varepsilon_{pq} - e_{pq})}{\partial u_{i,j}} = S_{pq} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_{i,j}} (u_{k,p} u_{k,q}) = \\ &= \frac{1}{2} (S_{iq} u_{i,q} + S_{pj} u_{i,p}) = S_{jk} u_{i,k}. \end{aligned} \quad (20)$$

Portant ces dernières expressions dans (16) et (17), nous obtenons finalement l'équation différentielle de l'équilibre instable :

$$\sigma_{ij,j} + S_{jk} u_{i,jk} - F_k u_{i,k} = 0 \quad (21)$$

avec les conditions aux limites qui sont, en tenant compte de (7) :

$$n_j \sigma_{ij} + P_k u_{i,k} = 0 \quad (22)$$

soit :

$$u_i = 0 \quad (22a)$$

En particulier pour une surface non chargée on a :

$$n_j \sigma_{ij} = 0 \quad (22b)$$

ce qui est la forme habituelle des conditions aux limites [8, 12] dans la théorie du 1<sup>er</sup> ordre. Les équations (21) et (22) auraient aussi la forme des équations d'équilibre du 1<sup>er</sup> ordre [8, 12], si l'on considérait les charges de volumes et les charges de surfaces suivantes :

$$F_i^* = S_{jk} u_{i,jk} - F_k u_{i,k} \quad (23)$$

$$P_i^* = -P_j u_{i,j} \quad (23a)$$

qui dépendent de la déformation.

NOTE. Si nous définissons le tenseur de contrainte  $T_{ij}$  :

$$T_{ij} = S_{ij} + \sigma_{ij} + t_{ij} \quad (24a)$$

avec :

$$t_{ij} = S_{jk} u_{i,k},$$

qui n'est pas symétrique, des équations (21) et (22) il découle :

$$T_{ij,j} + F_i = 0 \quad \text{et} \quad n_j T_{ij} = P_i. \quad (24b)$$

D'après ces équations les contraintes  $T_{ij}$  doivent représenter les forces totales dans les directions des axes  $x_i$ , qui agissent sur l'élément obtenu de l'élément  $dx_1 dx_2 dx_3$  par déformation  $u_i$  (qui n'est plus parallélepède) et qui sont rapportées aux aires initiales  $dx_2 dx_3$ ,  $dx_3 dx_1$ ,  $dx_1 dx_2$ . On peut facilement établir la relation de ces contraintes avec les contraintes d'Euler  $T'_{ij}$ , qui sont les contraintes réelles (symétriques), qui agissent à l'élément  $dx'_1 dx'_2 dx'_3$  découpé après la déformation et qui sont rapportées aux aires après la déformation  $dx'_2 dx'_3$ , etc. Dans ce but considérons un volume quelconque  $V$  coupé dans le matériau avant la déformation qui se transforme en volume  $V'$  après la déformation. L'égalité des forces qui résultent de  $T_{ij}$  dans  $V$  et de  $T'_{ij}$  dans  $V'$  exige que :

$$\int_{(V)} n_j T_{ij} dV = \int_{(V')} n'_k T'_{ik} dV'$$

Puisque la normale de la surface :

$$n_j = n'_k (\partial x'_k / \partial x_j) = n'_k (\delta_{jk} + u_{k,j})$$

et encore :

$$dV' = D dV \quad \text{où} \quad D = \det (dx'_i / dx_j) \simeq 1 + u_{i,i},$$

on obtient :

$$\int_{(V')} [n'_k T'_{ik} - n'_k (\delta_{jk} + u_{k,j}) T_{ij} / D] dV' = 0.$$

Considérait que le volume  $V'$  peut être quelconque, on a finalement :

$$T'_{ik} = (T_{ik} + T_{ij} u_{k,j}) / D \quad (24c)$$

avec :

$$T'_{ik} = T_{ki}.$$

Les relations inverses sont  $T_{ij} = D (T'_{ij} - T'_{ik} u_{j,k})$ . Ainsi nous avons également démontré la signification statique de  $\sigma_{ij}$ , défini d'abord par la loi de déformation ou par son potentiel.

REMARQUE :

Les équations obtenues par BIOT diffèrent du fait que ([2], éq. II.2.24) :

$$t_{ij} = S_{jk} u_{i,k} - \frac{1}{2} S_{jk} e_{ik} - \frac{1}{2} S_{ik} e_{jk} \quad (24d)$$

$$F_i^* = t_{ij,j}, \quad P_i^* = -n_j t_{ij}$$

ce qui est en principe dû uniquement au fait qu'il introduit au lieu de (1) la déformation finie comme ([2], éq. I.3.28) :

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} - \frac{1}{2} e_{ki} e_{kj} \quad (24e)$$

d'où découle (24d) par substitution dans (20).

Les équations d'équilibre de NOVOZHILOV ([10 a], éq. V. 16) ont encore une autre forme, où les termes de second ordre [(23), (23a)] disparaissent pour la rotation locale nulle, à savoir :  $t_{ij} = \frac{1}{2} S_{jk} (u_{i,k} - u_{k,i})$ , ce qui ne peut être exprimé comme  $\partial J_0 / \partial u_{i,j}$  pour aucune forme de  $\varepsilon_{ij}$  et paraît alors inacceptable.

Dans la théorie de NEUBER [9, 10, 3] on écrit les équations d'équilibre classiques  $\sigma_{ij,j} = 0$  et on considère :

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= (\partial x_i / \partial x'_k) (\partial x_j / \partial x'_l) S_{kl} + \sigma_{ij} / D = \\ &= S_{ij} - S_{jk} u_{i,k} - S_{ik} u_{j,k} + \sigma_{ij} / D, \end{aligned}$$

ce qui donne les conditions aux limites :

$$n'_i T'_{ij} = P'_i = P_i / D$$

ou bien :

$$n_j (\sigma_{ij} - S_{jk} u_{i,k} - 2 S_{ik} e_{jk}) = P_i (D - 1).$$

On voit que la théorie de NEUBER ou celle de NOVOZHILOV sont en désaccord total avec notre théorie et avec le critère de PEARSON, tandis que la théorie de BIOT diffère seulement avec la définition de  $\varepsilon_{ij}$ .

## V. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE L'INSTABILITÉ EN TERMES DE DÉPLACEMENTS

En exprimant  $\sigma_{ij}$  à partir de la loi élastique (2) et en considérant l'expression géométrique (1a), il résulte immédiatement de (21) (lettre de l'auteur à M. A. BIOT, 29 novembre 1965) :

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,i} + u_{i,k}) + S_{jk} u_{i,jk} - F_k u_{i,k} = 0 \quad (25)$$

avec les conditions aux limites (22) et (22a), dont la forme en termes de déplacements est évidente. En particulier, pour un matériau isotrope on a les équations :

$$G u_{i,jj} + \frac{G}{1 - 2\nu} u_{i,i} + S_{jk} u_{i,jk} - F_k u_{i,k} = 0. \quad (26)$$

On constate que, à l'exception des deux derniers termes exprimant la force volume  $F_i^*$  de , elles sont identiques aux équations de LAMÉ de l'élasticité classique [8, 12].

Si l'on considère le matériau orthotrope d'après (2a), on arrive par le même procédé (pour  $F_i = 0$ ) aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ E_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + E_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} + E_{xz} \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ G_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ G_{xz} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \left[ S_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + S_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \right. \\ \left. + 2 S_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 S_{yz} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2 S_{zx} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right] = 0, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

On aurait pu obtenir directement les mêmes équations à partir de la condition (16), après substitution pour le matériau orthotrope :

$$U_1 = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} \left\{ \left( E_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + E_{xy} \frac{\partial v}{\partial y} + E_{xz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \dots \right. \\ \left. + G_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \dots \right\} dx dy dz. \quad (28)$$

Les équations (25) ou (27) avec les conditions aux limites représentent un problème des valeurs propres  $S_x, S_y, \dots$

Remarquons enfin que l'on peut généraliser les équations à un matériau viscoélastique, si l'on considère les équations d'équilibre (21)-(24) comme fondamentales et si l'on tient compte de l'analogie élastique-viscoélastique. Pour cela, il faudrait remplacer les modules élastiques  $E_{xx} \dots$  par les opérateurs du fluage différentiels ou intégraux dans le temps.

VI. QUELQUES FORMES DE L'INSTABILITÉ

VI.1. — Nous allons étudier maintenant quelques solutions possibles des équations (27) pour certaines conditions aux limites, en considérant que les contraintes initiales sont uniformes (indépendantes de  $x, y, z$ ) et que le matériau est homogène ( $E_{xx} \dots$  sont constantes) et orthotrope. Les équations (27) peuvent être satisfaites par :

$$\begin{aligned} u &= a e^{\mu x} e^{\nu y} e^{\lambda z} \\ v &= b e^{\mu x} e^{\nu y} e^{\lambda z} \\ w &= c e^{\mu x} e^{\nu y} e^{\lambda z} \end{aligned} \quad (29)$$

(où  $\mu, \nu, \lambda$  et  $a, b, c$  sont complexes) quand les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a \left[ \mu^2 (E_{xx} + S_x) + \nu^2 (G_{xy} + S_y) + \lambda^2 (G_{xz} + S_z) + \right. \\ \left. + 2 \mu \nu S_{xy} + 2 \nu \lambda S_{yz} + 2 \mu \lambda S_{zx} \right] + \\ + b \mu \nu (E_{xy} + G_{xy}) + c \mu \lambda (E_{xz} + G_{xz}) = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

avec les deux autres relations, obtenues par permutation de  $(x, y, z)$ ,  $(\mu, \nu, \lambda)$ ,  $(a, b, c)$ , sont remplies. Les trois équations (30) forment un système d'équations algébriques linéaires homogènes pour  $a, b, c$ . Pour que leur solution non nulle existe, leur déterminant doit être nul. Les valeurs  $\mu, \nu, \lambda$  doivent encore satisfaire aux trois conditions aux limites, alors que l'annulation du déterminant constitue une condition pour les valeurs critiques de  $S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}$  ou bien pour un multiplicateur critique  $\mu_{crit}$  des valeurs initiales données  $S_x^0, S_y^0, S_z^0, \dots$  ( $S_{x,crit} = \mu_{crit} S_x^0 \dots$ ). Dans le cas général une telle solution serait assez compliquée.

VI.2. — Étudions donc maintenant le cas spécial de l'instabilité sinusoïdale dans les directions  $x$  et  $y$  et considérons que les contraintes initiales sont homogènes et que :  $S_{xy} = S_{yz} = S_{zx} = 0$ . Si nous introduisons (fig. 1) :

$$\begin{aligned} u &= \xi(z) \sin \alpha x \cos \beta y \\ v &= \eta(z) \cos \alpha x \sin \beta y \\ w &= \zeta(z) \cos \alpha x \cos \beta y \end{aligned} \quad (31)$$

les équations (27) sont satisfaites quand :

$$\begin{aligned} - (G_{xz} + S_z) \frac{d^2 \xi}{dz^2} + [\alpha^2 (E_{xx} + S_x) + \beta^2 (G_{xy} + S_y)] \xi + \\ + \alpha \beta (E_{xy} + G_{xy}) \eta + \alpha (E_{xz} + G_{xz}) \frac{d \zeta}{dz} = 0, \\ \alpha \beta (E_{xy} + G_{xy}) \xi - (G_{yz} + S_z) \frac{d^2 \eta}{dz^2} + \\ + [\alpha^2 (G_{xy} + S_x) + \beta^2 (E_{yy} + S_y)] \eta + \beta (E_{yz} + G_{yz}) \frac{d \zeta}{dz} = 0 \\ \alpha (E_{xz} + G_{xz}) \frac{d \xi}{dz} + \beta (E_{yz} + G_{yz}) \frac{d \eta}{dz} + \\ + (E_{zz} + S_z) \frac{d^2 \zeta}{dz^2} - [\alpha^2 (G_{xz} + S_x) + \beta^2 (G_{yz} + S_y)] \zeta = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Ainsi nous avons obtenu un système de trois équations différentielles ordinaires linéaires homogènes pour  $\xi(z), \eta(z), \zeta(z)$  qui définit avec les conditions aux limites un problème des valeurs propres.

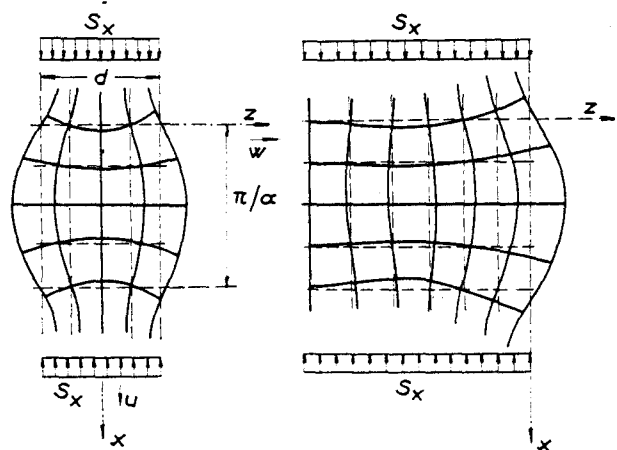


FIG. 1.

Les relations (31) permettent de satisfaire les conditions aux limites pour un appui rigide sans frottement, c'est-à-dire (fig. 2) :

$$\begin{aligned} u = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0 & \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = n \pi / \alpha. \\ v = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0 & \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = m \pi / \beta. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit considérons une plaque épaisse (fig. 2a, b) limitée par les deux plans  $z = z_1$  et  $z = z_2$  ( $d = z_2 - z_1$ ) ou, pour  $z_2 \rightarrow \infty$ , un demi-espace (fig. 2d, e). Des conditions aux limites (22) il vient d'après (2a) pour  $z = z_1$  et  $z = z_2$  :

$$\begin{aligned} E_{zz} \frac{\partial u}{\partial x} + E_{yz} \frac{\partial v}{\partial y} + E_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_z \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ G_{xz} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + S_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ G_{yz} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + S_z \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

ou bien :

$$E_{xz} \alpha \xi + E_{yz} \beta \eta + (E_{zz} + S_z) \frac{d\zeta}{dz} = 0, \quad (33)$$

$$G_{xz} \left( \frac{d\xi}{dz} - \alpha \zeta \right) + S_z \frac{d\xi}{dz} = 0,$$

$$G_{yz} \left( \frac{d\eta}{dz} - \beta \zeta \right) + S_z \frac{d\eta}{dz} = 0$$

pour  $z = z_1, z = z_2$ .

VI.3. — Étudions d'abord quelques formes sinusoidales élémentaires d'instabilité et introduisons :

$$\xi = a \cos \gamma z, \quad \eta = b \cos \gamma z, \quad \zeta = c \sin \gamma z. \quad (34)$$

Par substitution dans (32) il vient :

$$a [\alpha^2 (E_{xx} + S_x) + \beta^2 (G_{xy} + S_y) + \gamma^2 (G_{xz} + S_z)] + b \beta \alpha (E_{xy} + G_{xy}) + c \alpha \gamma (E_{xz} + G_{xz}) = 0,$$

$$a \alpha \beta (E_{xy} + G_{xy}) + b [\alpha^2 (G_{xy} + S_x) + \beta^2 (E_{yy} + S_y) + \gamma^2 (G_{yz} + S_z)] + c \beta \gamma (E_{yz} + G_{yz}) = 0,$$

$$a \alpha \gamma (E_{xz} + G_{xz}) + b \beta \gamma (E_{yz} + G_{yz}) + c [\alpha^2 (G_{xz} + S_x) + \beta^2 (G_{yz} + S_y) + \gamma^2 (E_{zz} + S_z)] = 0,$$

avec les conditions à la surface :  $z = z_1$ , surface que nous considérons non chargée,  $S_z = 0$  :

$$(a \alpha E_{xz} + b \beta E_{yz} + c \gamma E_{zz}) \cos \gamma z_1 = 0$$

$$(a \gamma + c \alpha) \sin \gamma z_1 = 0 \quad (36)$$

$$(b \gamma + c \beta) \sin \gamma z_1 = 0$$

et les conditions analogues pour  $z = z_2$ .

Deux solutions élémentaires sont maintenant possibles :

a) Nous choisissons une origine des coordonnées telle que  $z_2 = -z_1 = \frac{d}{2}$  et nous remplissons les conditions (36) par :

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{a}{c}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{b}{c}, \quad \gamma = \frac{\pi}{d}, \frac{3\pi}{d}, \frac{5\pi}{d}, \dots \quad (37)$$

Dans ce cas on obtient aussi  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  dans tous les points internes. Il s'agit alors d'une forme purement compressive de l'instabilité. Nous pouvons procéder ici par substitution de (37) dans (35) ce qui donne un système de trois équations algébriques linéaires homogènes en  $a^2, b^2, c^2$  dont le déterminant, qui doit s'annuler, est le suivant ( $S_z = 0$ ) :

$$\begin{vmatrix} E_{xx} + S_x, E_{xy} + 2G_{xy} + S_y, -E_{xz} \\ E_{xy} + 2G_{xy} + S_x, E_{yy} + S_y, -E_{yz} \\ S_x - E_{xz}, S_y - E_{yz}, E_{zz} \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

En évaluant le déterminant, le coefficient de  $S_x S_y$  s'annule et la condition (38) pour les compressions critiques prend la forme suivante :

$$A S_x + B S_y + C = 0 \quad (38a)$$

où

$$C = \frac{E_{xx} E_{yy} E_{zz} - E_{zz}^2 E_{yy} - E_{yz}^2 E_{xx} - E_{zz} (E_{xy} + 2G_{xy})^2 + 2 E_{xz} E_{yz} (E_{xy} + 2G_{xy})}{E_{zz}^2} \quad (38b)$$

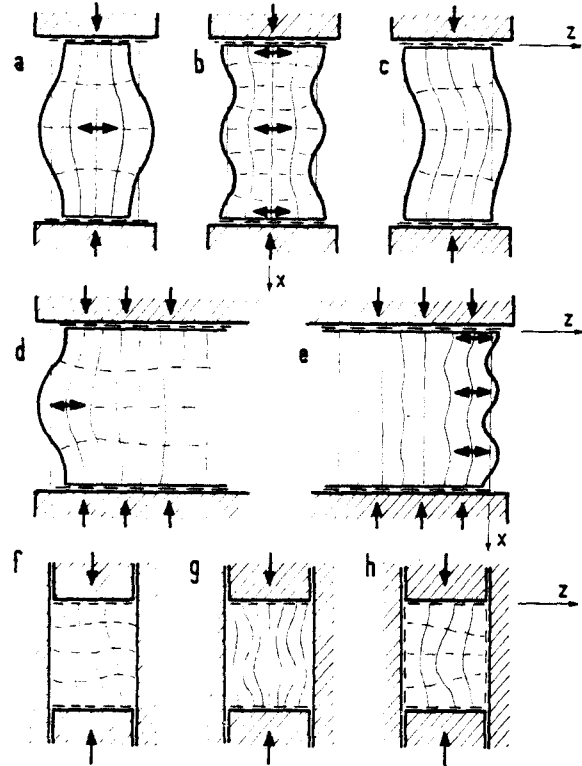


FIG. 2.

Pour le cas de l'instabilité plane, le déterminant (38) est du deuxième ordre,  $v = b = \beta = 0$ , et il en résulte la compression critique suivante (fig. 2) :

$$S_x^* = -\frac{E_{xx} E_{zz} - E_{xz}^2}{E_{zz} + E_{xx}} \quad (39)$$

En tenant compte de l'expression (39) et de l'expression analogue pour  $S_y^*$  qui doivent satisfaire à l'équation (38a), nous pouvons écrire la condition (38a) pour les compressions critiques  $S_x$  et  $S_y$  dans le cas spatial sous la forme :

$$\frac{S_x}{S_x^*} + \frac{S_y}{S_y^*} = 1. \quad (39a)$$

b) Le second cas élémentaire pour remplir (36) est le suivant (pour  $z_1 = 0$  et  $z_2 = d$ )

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -r \frac{c}{a} \frac{E_{zz}}{E_{xx}}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = (r-1) \frac{c}{b} \frac{E_{zz}}{E_{yz}}, \quad \gamma = \pi d, 2\pi d, \dots \quad (40)$$

où  $r$  peut être choisi quelconque (arbitrairement). Dans ce cas les contraintes  $\sigma_{zz}$  s'annulent aussi dans tous les points internes.

La substitution de (40) dans (35) donne un système de trois équations algébriques linéaires homogènes en  $a^2 b^2, b^2 c^2, a^2 c^2$  dont le déterminant, qui doit s'annuler, est le suivant :

$$\begin{vmatrix} G_{xz}, r^2 \frac{E_{zz}^2}{E_{xz}^2} (E_{xx} + S_x) - r(r-1) \frac{E_{zz}^2}{E_{xz} E_{yz}} (E_{xy} + G_{xy}) - r \frac{E_{zz}}{E_{xz}} (E_{xz} + G_{xz}), (r-1)^2 \frac{E_{zz}^2}{E_{yz}^2} (G_{xy} + S_y) \\ G_{yz}, r^2 \frac{E_{zz}^2}{E_{yz}^2} (G_{xy} + S_x), (r-1) \frac{E_{zz}}{E_{yz}} (E_{yz} + G_{yz}) - r(r-1) \frac{E_{zz}^2}{E_{xz} E_{yz}} (E_{xy} + G_{xy}) + (r-1)^2 \frac{E_{zz}^2}{E_{yz}^2} (E_{yy} + S_y) \\ -r \frac{E_{zz}}{E_{xz}} (E_{xz} + G_{xz}) + (r-1) \frac{E_{zz}}{E_{yz}} (E_{yz} + G_{yz}) + E_{xz}, r^2 \frac{E_{zz}^2}{E_{xz}^2} (G_{xz} + S_x), (r-1)^2 \frac{E_{zz}^2}{E_{yz}^2} (G_{yz} + S_y) \end{vmatrix} = 0. \quad (41)$$

Pour l'instabilité plane,  $\nu = b = \beta = 0$ ; il en résulte, après transformations, que :

$$S_x \text{ crit.} = - \frac{E_{xx} E_{zz} - E_{xz}^2}{E_{zz} + E_{xx} (1 + E_{xz}/G_{xz})}. \quad (42)$$

VI.4. — Étudions maintenant la solution générale pour l'instabilité sinusoïdale dans les directions  $x$  et  $y$  parallèles à la surface plane du corps. Par raison de simplicité nous devons nous limiter au cas plan. Si nous introduisons dans (32) ( $S_{zz} = 0$ ) :

$$\xi = a e^{\lambda x}, \quad \zeta = c e^{\lambda x} \quad (b = \beta = 0) \quad (43)$$

nous obtenons un système de deux équations algébriques linéaires homogènes en  $a$  et  $c$ , dont le déterminant, qui doit s'annuler, est le suivant :

$$\begin{vmatrix} -(E_{xx} + S_x) \alpha^2 + (G_{xz} + S_z) \lambda^2, & -(E_{xx} + G_{xz}) \alpha \lambda \\ \alpha \lambda (E_{xx} + G_{xz}), & (E_{zz} + S_z) \lambda^2 - (G_{xz} + S_x) \alpha^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (44)$$

C'est une équation algébrique en  $(\lambda/\alpha)$  :

$$(\lambda/\alpha)^4 - 2p (\lambda/\alpha)^2 + q = 0 \quad (44a)$$

où

$$2p =$$

$$\frac{(E_{xx} + S_x)(E_{zz} + S_z) + (G_{xz} + S_x)(G_{xz} + S_z) - (E_{zz} + G_{zz})^2}{(G_{xz} + S_z)(E_{zz} + S_z)} \quad (44b)$$

$$q = \frac{(E_{xx} + S_x)(G_{xz} + S_z)}{(G_{xz} + S_z)(E_{zz} + S_z)}$$

Considérons d'abord les deux cas où toutes les racines de cette équation sont soit réelles, soit imaginaires et différentes. Pour obtenir ces cas il faut et il suffit que :

$$p^2 > q \quad \text{et} \quad q > 0 \quad (45a)$$

soit la compression transversale  $S_x$  pas trop forte, de sorte que  $G_{xz} + S_x > 0$ ,  $E_{zz} + S_z > 0$ . Puisque  $|S_x| \geq E_{xx}$  n'a pas de sens physique, la deuxième inégalité exige (en supposant que  $E_{xx} > G_{xz}$ ) que :  $-S_x > G_{xz}$ . Les deux inégalités (45a) sont remplies au moins pour un certain intervalle fini :

$$G_{xz} < -S_x < G_{xz} + \delta, \quad (\delta > 0) \quad (45b)$$

parce que si nous considérons  $S_x$  infiniment proche de la valeur  $-G_{xz}$ ,  $q$  devient infiniment petit (positif), tandis que  $p^2$  a une valeur finie, à l'exception du cas  $(E_{zz} + S_z)(E_{xx} - G_{xz}) = (E_{xx} + G_{xz})^2$ , ce qui est assuré pour l'orthotropie suffisamment forte ( $E_{zz}, G_{xz}, E_{xx} \ll E_{xx}$ ).

Examinons maintenant le cas des racines imaginaires  $\pm i k_1, \pm i k_2$  ( $i$  est l'unité imaginaire) :

$$k_{1,2} = \sqrt{-p \pm \sqrt{p^2 - q}} \quad (46)$$

qui est obtenu pour  $p < 0$ , ce qui peut advenir quand  $E_{zz}$  est petit par rapport à  $G_{xz}$  ou  $E_{xx}$ , étant donné que ceux-ci sont encore plus petits par rapport à  $E_{xx}$ . Choisissons pour l'instant les deux racines  $\pm i k_1$  de signes opposés. Dans ce cas on obtient, d'après les équations en  $a$  et  $c$  qui correspondent au déterminant (44),  $c_2/a_2 = -c_1/a_1$  et nous constatons que ce choix nous amène à deux fonctions identiques à (34). Mais nous avons déjà traité cela dans (37) - (42). Nous choisissons donc deux racines différentes  $i k_1$  et  $i k_2$ , auxquelles correspond la solution générale :

$$\xi = a_1 \cos k_1 x z + a_2 \cos k_2 x z, \quad (46a)$$

$$\zeta = a_1 \frac{c_1}{a_1} \sin k_1 x z + a_2 \frac{c_2}{a_2} \sin k_2 x z.$$

Ce type de solution permet d'obtenir l'instabilité symétrique d'une plaque épaisse (fig. 2a, b) avec les surfaces :  $z_1 = -d/2$ ,  $z_2 = d/2$ . Les conditions (33) aux surfaces fournissent le même système de deux équations linéaires homogènes en  $a_1, a_2$ , dont le déterminant, après la division de ses colonnes par  $\cos k_1 \alpha \frac{d}{2}$  et

$\cos k_2 \alpha \frac{d}{2}$ , est le suivant :

$$\begin{vmatrix} E_{zz} + E_{zz} k_1 c_1/a_1, & E_{zz} + E_{zz} k_2 c_2/a_2 \\ G_{xz} (k_1 + \frac{c_1}{a_1}) \operatorname{tg} k_1 \alpha \frac{d}{2} - S_x k_1 \frac{c_1}{a_1}, & \\ G_{xz} (k_2 + \frac{c_2}{a_2}) \operatorname{tg} k_2 \alpha \frac{d}{2} - S_x k_2 \frac{c_2}{a_2} \end{vmatrix} = 0. \quad (46b)$$

Il peut toujours être annulé par un certain choix de  $\alpha$ .

En même temps ce type de solution permet de satisfaire, pour  $z = 0$  et  $z = d$ , par un certain choix de  $\alpha$ , aux conditions des bords fixées (fig. 2f, g),  $u = w = 0$  (une couche élastique enfermée dans un matériau rigide) et aussi les conditions d'appui rigide sans frottement (fig. 2h) ( $w = \tau_{xz} = 0$ ).

Nous pouvons alors constater que, pour ce type d'instabilité, la plus petite compression critique  $S_x$  est celle infiniment proche de  $-G_{xz}$ , c'est-à-dire :

$$\operatorname{Inf}(-S_x \text{ crit.}) = G_{xz}. \quad (47)$$

Parce que dans ce cas là aussi les valeurs de  $k_1, k_2$  et de  $c_1/a_1, c_2/a_2$  sont infiniment proches, il faut, pour annuler le déterminant (46b), que  $\alpha \rightarrow \infty$ , ou bien que la longueur  $2\pi/\alpha$  des ondes de plissement du matériau devienne infiniment petite. Alors dans un intervalle (45b), plus la longueur minimale admissible des ondes de plissement est grande, plus la valeur de la compression critique est grande. Observons que c'est le cas contraire de celui des corps minces.

L'autre des deux cas remplissant (45a) est le cas des racines réelles  $\pm l_1$  et  $\pm l_2$  :

$$l_{1,2} = \sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q}} \quad (48)$$

qui est obtenu pour  $p > 0$ , ce qui se produit quand les modules  $E_{zz}, G_{xz}, E_{xx}$  sont petits par rapport à  $E_{xx}$ , mais de même ordre de grandeur. La solution générale correspondant aux racines positives est :

$$\xi = a_1 e^{l_1 x z} + a_2 e^{l_2 x z}, \quad (48a)$$

$$\zeta = a_1 \frac{c_1}{a_1} e^{l_1 x z} + a_2 \frac{c_2}{a_2} e^{l_2 x z}.$$

Nous voyons que les déplacements disparaissent pour  $z \rightarrow -\infty$ , ce qui nous incite à considérer un demi-espace (fig. 2d, e)  $z \leq 0$ . Les conditions (33) à la surface  $z = 0$  procurent un système d'équations linéaires homogènes en  $a_1$  et  $a_2$ , dont le déterminant, qui doit s'annuler, est le suivant :

$$\begin{vmatrix} E_{zz} + (E_{zz} + S_z) l_1 c_1/a_1, & E_{zz} + (E_{zz} + S_z) l_2 c_2/a_2 \\ G_{xz} (l_1 - c_1/a_1) + S_x l_1 c_1/a_1, & \\ G_{xz} (l_2 - c_2/a_2) + S_x l_2 c_2/a_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (48b)$$

Considérant que  $k_1, k_2$  et  $c_1/a_1, c_2/a_2$  pour les modules et la contrainte  $S_x$  donnés ne dépendent que de  $S_x$ , ce déterminant est une fonction de  $S_x$ . Il ne peut être annulé [contrairement à (46b)], que pour certaines

valeurs critiques de  $S_x$  (toujours  $-S_x > G_{xz}$ ), lesquelles pourraient être déterminées, par exemple, en traçant la courbe à l'aide des valeurs numériques du déterminant (48b), calculées pour différentes valeurs numériques de  $S_x$  et les valeurs données des modules et de  $S_z$ . La longueur d'onde  $2\pi/\alpha$  de plissement de la surface ne dépend pas dans ce cas de la compression  $S_x$ .

Quand  $|q| > p^2$ , on a  $(\lambda/\alpha)^2 = -p \pm i\sqrt{q-p^2}$ . Les racines sont complexes et elles ont la forme  $\pm r_1 \pm i r_2$ , où

$$r_1 = \sqrt[4]{q} \cos \varphi, r_2 = \sqrt[4]{q} \sin \varphi, \cos 2\varphi = p/q.$$

La solution générale dans ce cas s'exprime comme :

$$\xi = (a_1 \operatorname{ch} r_1 \alpha z \cos r_2 \alpha z + a_2 \operatorname{sh} r_1 \alpha z \sin r_2 \alpha z) + (a_3 \operatorname{sh} r_1 \alpha z \cos r_2 \alpha z + a_4 \operatorname{ch} r_1 \alpha z \sin r_2 \alpha z) \quad (49)$$

$$\zeta = (c_1 \operatorname{ch} r_1 \alpha z \sin r_2 \alpha z - c_2 \operatorname{sh} r_1 \alpha z \cos r_2 \alpha z) + (c_3 \operatorname{sh} r_1 \alpha z \sin r_2 \alpha z - c_4 \operatorname{ch} r_1 \alpha z \cos r_2 \alpha z).$$

Les deux premiers termes décrivent la forme symétrique d'instabilité, les deux derniers termes la forme antisymétrique (fig. 2c). La forme antisymétrique doit limiter, pour  $z_1 - z_2 \rightarrow 0$ , à la solution classique d'EULER [13] et pour cela elle semble pour notre problème moins importante, car nous savons par la théorie classique que les contraintes transversales dans les corps minces sont peu importantes.

La forme symétrique pourrait, peut-être, mener à des compressions critiques plus petites que (47) ou (42), mais son étude sort du cadre de cet article.

Notons que pour un matériau isotrope nous pourrions même considérer l'état initial homogène de contrainte avec les contraintes  $S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}$  non nulles, car la solution précédente reste valable par rapport aux directions des contraintes principales initiales. Mais cela n'est pas possible pour un matériau orthotrope, comme dans un système d'axes déviés la loi élastique de la forme (2a) n'est plus valable.

A la suite de cette analyse nous pouvons conclure que pour un matériau isotrope (sauf les matériaux hyperélastiques comme le caoutchouc) les formes d'instabilité interne étudiées n'ont pas d'importance, comme d'après (47) la compression critique est trop grande et ne peut jamais être approchée. Mais d'autre part pour un matériau fortement orthotrope avec des modules d'élasticité transversaux assez petits, la compression critique peut aussi devenir relativement petite.

### VII. DÉFORMATIONS DUES AUX PERTURBATIONS DE L'ÉTAT INITIAL

Pour les charges proches des charges critiques les effets du second ordre ont une grande importance et provoquent une forte augmentation des contraintes et des déformations. La géométrie des constructions ainsi que les positions des charges ne sont jamais exactes et c'est pourquoi, par exemple, les formules de flambement des poteaux sont basées sur l'idée d'excentricité ou de courbure initiale. De la même façon on peut aussi considérer que l'on a certaines petites charges additives transversales (perturbations) ce qui sera le plus commode dans notre cas.

Étudions donc les déformations provoquées par les petits changements  $f_i$  et  $p_i$  des forces dans le volume et à la surface (perturbations) qui sont superposées aux forces initiales en équilibre. La valeur de l'énergie  $\Delta U$  est toujours donnée par (4), tandis que dans l'expression (5) ou (6) pour  $\Delta W$  il faut ajouter les termes  $\int_{(V)} f_i u_i dV + \int_{(S)} p_i u_i dS$ .

Par les mêmes transformations qui font passer de l'équation (4) à l'équation (10) on peut enfin obtenir :

$$\Delta U - \Delta W = U_1 + U_0 + \int_{(V)} f_i u_i dV + \int_{(S)} p_i u_i dS \quad (50)$$

étant donné que les contraintes initiales  $S_{ij}$  sont en équilibre. L'état de l'équilibre sous les charges  $f_i$  et  $p_i$  est obtenu à la condition que la valeur  $\Delta U - \Delta W$  de l'énergie potentielle du système atteigne le minimum. Il est alors nécessaire que la première variation  $\delta(\Delta U - \Delta W) = 0$ . Par le même procédé qui fait passer de l'équation (14) aux équations (21) - (23) on obtient enfin, au lieu de (21) - (23), les conditions de l'équilibre sous la forme (21), (22) dans laquelle il faut, cependant, ajouter au côté gauche le terme  $f_i$  ou  $p_i$ .

En illustration, examinons maintenant le cas élémentaire d'une plaque épaisse orthotrope avec les compressions initiales  $S_x$  et  $S_y$ , dont nous déduisons les déformations d'après (34). Nous considérons les perturbations sous une forme identique :

$$f_x = 0, f_y = 0, f_z = f_0 \cos \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z \\ p_x = p_y = p_z = 0.$$

Par substitutions dans (32) nous arrivons à des équations identiques à (35), à l'exception du fait que dans la troisième équation (35) il faut ajouter le terme  $f_z$ . Les conditions aux limites (36) restent inchangées et nous les remplissons par les relations (37). La substitution de (37) dans (35) (avec le terme  $f_z$  ajouté) fournit un système de trois équations algébriques linéaires en  $a^2, b^2, c^2$  dont le déterminant est (38) et dont les termes absolus du côté gauche sont 0,0 et  $cf_0/\gamma^2$ . La solution de ce système fournit :

$$c = -\frac{f_0 (E_{xx} + S_x) (E_{yy} + S_y)}{\gamma^2 (AS_x + BS_y + C)} \quad (51)$$

où A, B, C sont les mêmes expressions que dans (38a). En se basant sur l'expression (39) pour le cas de l'instabilité plane et de l'expression analogue pour  $S_y^*$ , on peut réécrire l'expression (51) sous la forme :

$$c = -\frac{f_0 (E_{xx} + S_x) (E_{yy} + S_y)}{\gamma^2 C (1 - S_x/S_x^* - S_y/S_y^*)} \quad (51a)$$

S'il n'y avait pas de contraintes initiales,  $S_x = S_y = 0$ , on aurait obtenu, comme un cas spécial de (51a) :

$$c = -f_0 E_{xx} E_{yy} / \gamma^2 C$$

où C est donné par (38b) et pour l'instabilité plane  $C = E_{xx} E_{zz} - E_{xz}^2$ . Donc les déformations ainsi que les contraintes normales dues aux perturbations  $f_z$  ne produisant pas de cisaillement sont amplifiées à cause des compressions initiales dans le rapport :

$$r = \frac{c}{c_0} = \frac{(1 + S_x/E_{xx})(1 + S_y/E_{yy})}{1 - S_x/S_x^* - S_y/S_y^*} \quad (51b)$$

Les compressions critiques résultent de la condition  $c \rightarrow \infty$  et on s'aperçoit immédiatement que l'on obtient les mêmes expressions que d'après (39) ou (39a).

Pour les autres formes plus générales de l'instabilité cette formule aurait une autre forme. Mais il est probable



que l'on pourrait l'utiliser approximativement aussi pour d'autres formes, si l'on substitue pour  $S_x^*$ ,  $S_y^*$  les valeurs critiques correctes, par exemple  $S_x^* \approx G_{xz}$ ,  $S_y^* \approx G_{yz}$ .

## VIII. SUR LA RÉSISTANCE EN COMPRESSION

Comme nous l'avons trouvé théoriquement, le phénomène d'instabilité interne, produisant des tensions transversales à la compression, peut apparaître seulement pour les matériaux fortement orthotropes. C'est le cas, par exemple, des plastiques renforcés et de certaines roches. Effectivement, il est expérimentalement bien connu que la rupture de tels matériaux se fait par longues fissures longitudinales et donne une image semblable aux formes d'instabilité de la figure 2.

Pour les stratifiés de plastiques renforcés par du tissu de verre on parle de *délamination*, c'est-à-dire détachement (clivage) et flambement transversal des couches individuelles à la rupture (fig. 3). Cependant, l'orthotropie provenant seulement de l'absence des fibres

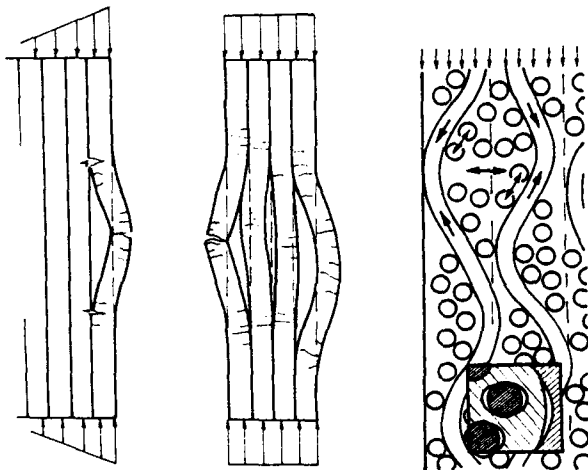


FIG. 3.

FIG. 4.

transversales n'est pas suffisamment forte. Par exemple, pour un plastique renforcé,  $E_{xx} = 2 \cdot 10^5$  kp/cm<sup>2</sup> et le module en cisaillement de la résine seule  $10^4$  kp/cm<sup>2</sup>. Pour une structure sans vides  $G_{xz}$  devrait être plus grand que cette dernière valeur, ce qui est trop grand, pour que le facteur d'amplification (51b) puisse être important. L'explication possible est la suivante. Sous la compression initiale se produisent des tractions transversales locales à cause de la non-homogénéité (fig. 4), à savoir la répartition locale des contraintes. Comme l'adhérence à l'interface verre-résine est très faible, n'ayant pas de caractère chimique, de petites fissures doivent se former à l'interface sous traction ou cisaillement. Ces microfissures sont en général parallèles à la contrainte. Par suite, elles doivent réduire les modules transversaux moyens  $E_{zz}$  et  $G_{xz}$ , surtout dans une coupe qui contient le maximum d'interface (qui peut atteindre 95 %). Nous estimons que ces modules peuvent être réduits à l'ordre  $10^3$  kp/cm<sup>2</sup>. Le facteur d'amplification  $r$  peut être important pour une certaine fraction de cette valeur, ce qui nous amène à l'ordre des résistances effectives.

Pour les roches, les systèmes des fissures discontinues existent déjà au préalable et sous charge ils se développent plus loin.

Examinons encore plus en détail le rôle de la non-homogénéité dans les matériaux composites granulés fragiles, comme le béton. Comme c'est un matériau statistiquement isotrope, le flambement interne est impossible sans tenir compte d'une préfissuration orientée. Par contre, il nous paraît impossible d'expliquer les fissures longitudinales longues sans considérer l'instabilité, ce que nous essayons d'éclaircir.

Nous excluons d'abord le cas de frottement aux appuis, qui ne peut influencer qu'une courte distance des appuis (fig. 5a). D'ailleurs, les fissures longitudinales se forment surtout dans les éprouvettes avec les appuis sans frottement (avec carton) [7].

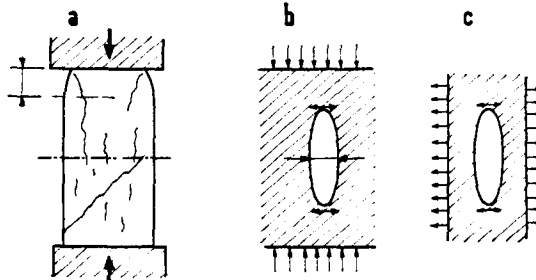


FIG. 5.

Le coefficient de Poisson moyen ne cause qu'une extension transversale, tandis que la contrainte transversale moyenne dans une coupe suffisamment longue par rapport aux grains reste toujours nulle.

Du point de vue de la théorie de GRIFFITH [4a] la propagation d'une fissure parallèle à la contrainte normale (fig. 5b) est impossible, parce que la diminution de l'énergie élastique du corps due, par exemple, à une ouverture elliptique (fig. 5b) est proportionnelle seulement à l'axe transversal de l'ellipse et ne change pas avec son axe longitudinal, tandis que l'énergie de surface avec cet axe augmente. Même la traction transversale à la tête de la fissure (fig. 5b) tend vers zéro avec l'axe transversal de l'ellipse.

Pour illustrer la coopération des phases aux modules très différents dans un matériau granulé, considérons les cas typiques idéalisés des configurations des grains d'après la figure 6. La transmission des efforts pour la

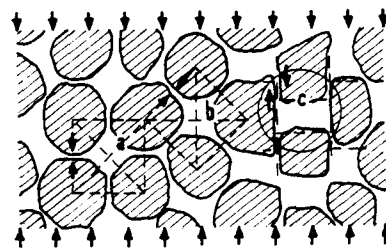


FIG. 6.

configuration a ou b peut être interprétée par le modèle des figures 7a et 7b — un treillis hyperstatique —, où les barres de rigidité forte représentent les efforts normaux transmis par les contacts des grains, les barres faibles idéalisent les efforts normaux transmis par la matrice à module bas. (Un treillis semblable a été proposé par A.L.L. BAKER dans *Mag. of Concrete Research*, 1959, n° 33.)

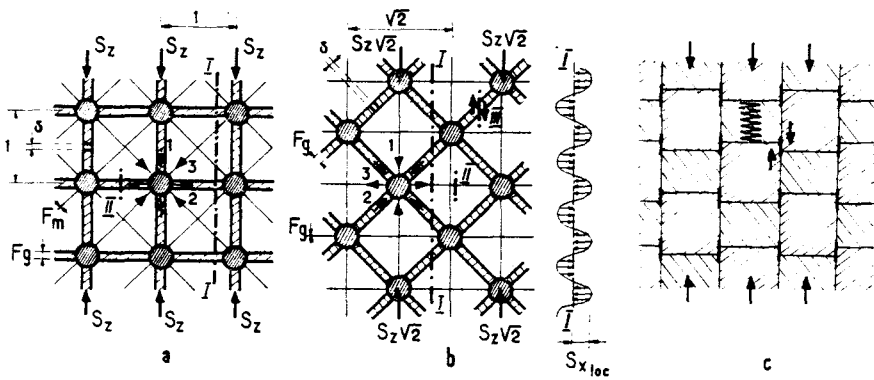


FIG. 7.

Dans le treillis considéré se produisent des forces de tractions  $S_2$  dans les barres transversales (2 de la fig. 7), qui sont pour la configuration  $b$  beaucoup plus fortes (effet de coin des grains). Par exemple, pour le rapport 10 : 1 des rigidités des barres, on a calculé les forces hyperstatiques dans les barres transversales  $S_2 = 0,062 S_2$  pour le cas  $a$  et  $S_2 = 0,438 S_2 \sqrt{2}$  pour le cas  $b$ . Dans une longue coupe longitudinale I-I, ces forces sont en équilibre avec les forces de compression dans les barres diagonales. La distribution continue des contraintes transversales locales dans cette coupe, qui correspondent aux forces dans ces barres, est aussi en équilibre. Si l'on suppose cette distribution sinusoïdale (fig. 7), les contraintes normales transversales locales extrêmes sont :

$$S_{x_{loc}} = \pm \pi S_2^{(a)} \quad \text{ou} \quad \pm \frac{1}{2} \pi S_2^{(b)} \sqrt{2} \quad (52)$$

pour la configuration  $a$  ou  $b$ .

Conformément à la théorie de GRIFFITH [4a], dans les petites régions II des tractions transversales, il se forme de courtes fissures (microfissures) longitudinales (fig. 8). Mais comme entre ces régions il y a des régions de compression, avant la formation des microfissures, ou des compressions presque nulles après leur formation, ces microfissures ne peuvent pas se prolonger, elles restent discontinues.

Si le phénomène d'instabilité ne pouvait pas se produire (une éprouvette très courte) et si l'on continuait à augmenter la compression, le matériau s'écras-

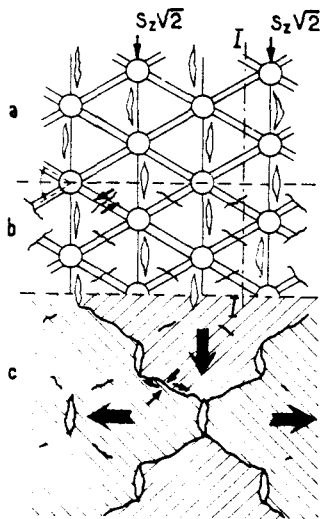


FIG. 8.

serait enfin par cisaillement (lignes de glissement inclinées, fig. 8b), d'après ce modèle, en particules indépendantes (gravier, sable ou poudre) et s'écoulerait à côté (fig. 8c).

Le troisième cas typique de la configuration des grains, le cas  $c$  d'après la figure 6 (cas de mur), peut être illustré par le modèle de la figure 7c (proposé par JOISEL) selon lequel il se forme aussi, par cisaillement entre les grains, des fissures longitudinales (ou plus exactement des lignes de glissement, sans clivage), lesquelles sont aussi discontinues.

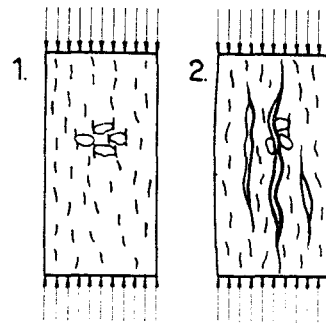


FIG. 9.

Les contraintes transversales, causées dans les configurations  $a$ ,  $b$  ou  $c$  par la différence du coefficient de POISSON et aussi par l'extension des grains et de la matrice, sont aussi locales, changent de signe et dans une coupe longue leur résultante est nulle. Et semblable est l'effet des vides.

Il peut aussi se former des lignes de glissement obliques (fig. 5a), mais c'est le cas de rupture qui ne nous intéresse pas. Nous remarquons seulement que dans ces lignes de glissement il y a toujours la compression, de sorte que les fissures ne peuvent pas s'ouvrir (et causer l'orthotropie macroscopique).

Le fait important, que nous devons finalement souligner, c'est que les microfissures primaires sous la compression doivent être orientées (fig. 9), et, par conséquent, causer l'orthotropie secondaire du béton, c'est-à-dire réduire les modules transversaux. (Elles peuvent exister déjà pour les compressions beaucoup plus basses qu'à la rupture.) Donc, une fois une certaine compression atteinte, le flambement doit se manifester et se traduire, l'onde s'allongeant, par une longue fissure longitudinale (fig. 9). (La diminution du module transversal était vérifiée par mesure de la vitesse transversale du son [7], bien que dans ce cas il s'agisse

d'une moyenne entre le module en traction, qui est diminué, et le module en compression, qui ne l'est pas.)

Dès qu'une non-homogénéité existe, c'est encore la fragilité (une faible résistance à la traction) qui est nécessaire pour la formation des microfissures. Pour les plastiques renforcés, d'autre part, au lieu de la fragilité on a une faible adhérence à l'interface, que nous avons discutée.

Si nous avons une compression transversale  $S_z$  en plus, elle se superpose aux contraintes locales (52) et diminue les tractions. La formation des microfissures primaires est alors plus faible, ainsi que l'orthotropie secondaire, ou n'existe pas du tout.

Cette théorie acceptée, les formules pour la résistance devaient prendre une forme analogue à celle des poteaux. Outre les tensions transversales locales il existe toujours encore certaines faibles tensions transversales à grande échelle, dues aux certaines perturbations initiales, ce qui est analogue aux moments dus à l'excentricité ou à la courbure inévitable dans les poteaux [par exemple, surfaces pas exactement planes, imprécision des charges,

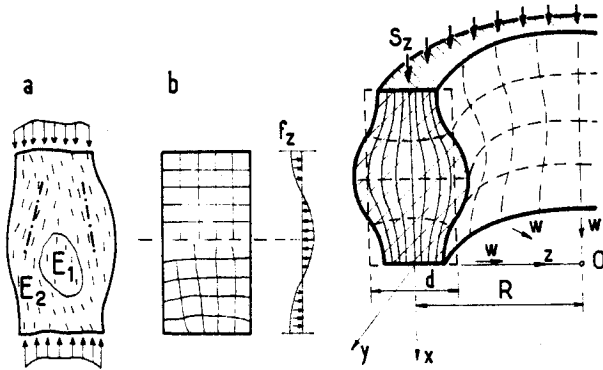


FIG. 10.

FIG. 11.

variabilité du module moyen, déviation des axes d'orthotropie, etc. (fig. 10 a), perturbant l'image des isostatiques initiales (fig. 10 b)]. Elles sont d'abord proportionnelles à  $S_x$  et  $S_y$ , c'est-à-dire exprimées comme  $C_1 S_x + C_2 S_y$ . Ces contraintes s'amplifient par le facteur  $r$ , par exemple d'après (51b). Si nous supposons que la rupture se produit quand la résistance moyenne  $\alpha_t$  en traction transversale est atteinte, nous pouvons écrire la condition approximative pour la résistance sous la forme :

$$r (C_1 S_x + C_2 S_y) \leq \alpha_t \quad (53)$$

Les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  devaient être déterminés d'après les essais. D'habitude, c'est-à-dire pour  $E_{xx} = E_{yy}$ , il faut que  $C_1 = C_2$ .

La formule (53) peut aussi expliquer le fait que la résistance à la délamination des stratifiés du tissu de verre est plus grande pour un tube que pour une plaque plane et qu'elle augmente avec la courbure transversale. Considérons une forme symétrique d'instabilité avec la notation de la figure 11. Le déplacement entraîne une extension  $\varepsilon_y = -w/R$ , à laquelle correspond une certaine contrainte  $\sigma_y \approx -E_{yy} w/R$ . Cette contrainte,

selon la condition différentielle d'équilibre dans le voile courbe :  $\partial \sigma_z / \partial z = -\sigma_y / R$ , provoque une compression additive  $\sigma_z$ . Considérant que  $w \sim \zeta \approx \sin 2\pi z/d$ , l'intégration donne  $\sigma_z \sim -E_{yy} d/R^2$ . A la suite de ce raisonnement fort approximatif on peut donc supposer la condition de la délaminaton sous la forme :

$$r C_1 S_x (1 - k E_{zz} d/R^2) \leq \alpha_t, \quad (54)$$

où  $k$  est un certain coefficient expérimental.

## IX. CONCLUSIONS PRATIQUES

1° Dans un matériau parfaitement homogène, pour une certaine compression critique, il y a instabilité interne accompagnée par des tractions transversales de second ordre. La compression critique est déterminée par les modules élastiques.

2° La résistance en compression doit être plus petite que la compression critique.

3° La compression critique diminue fortement avec les modules transversaux s'il y a orthotropie. C'est le cas des plastiques renforcés par du tissu de verre et aussi de certaines roches. Mais malgré cela, cette orthotropie paraît insuffisante pour déterminer le phénomène. Dans le cas d'un matériau isotrope ce phénomène est exclu (sauf pour le caoutchouc).

4° Mais l'orthotropie du matériau est intensifiée sous compression uniaxiale (avant l'instabilité, phase primaire) par la formation d'un système de courtes microfissures discontinues, orientées longitudinalement, et causées par les tractions transversales locales dues à la non-homogénéité, ce qui diminue les modules transversaux moyens. La condition déterminante est la fragilité ou la faible adhérence des phases. (Dans les roches ces systèmes existent préalablement et se développent davantage.)

5° Cette orthotropie secondaire se produit à cause de la non-homogénéité aussi dans les matériaux fragiles, initialement isotropes, comme le béton.

6° Il y a toujours dans un élément des imperfections ou perturbations initiales (comme l'excentricité des poteaux), qui font apparaître de faibles contraintes additives moyennes transversales en traction. Ces contraintes sont amplifiées par l'effet de second ordre (instabilité), et d'autant plus que la compression approche de la compression critique [par ex., éq. (51b)].

7° La théorie de GRIFFITH, qui ne peut pas expliquer la propagation des fissures parallèles à la compression uniaxiale, peut s'appliquer alors à ces tractions transversales secondaires.

8° La théorie confirme l'expérience qui montre que la résistance à la délaminaton d'un stratifié de verre fortement orthotrope augmente avec la courbure transversale (plaque et tuyau).

9° La théorie, en accord avec l'expérience, confirme que la résistance du béton augmente avec le module, ce qui sert de base pour les méthodes expérimentales non destructives.

10° La théorie confirme que la résistance en compression dépend de la résistance en traction (la fragilité du corps), laquelle est, de ce point de vue, la caractéristique fondamentale.

11° La théorie donne une certaine forme du diagramme d'interaction pour la compression biaxiale.

12° Dans certains cas, contrairement à celui des corps minces, la plus faible compression critique diminue avec la longueur minimale possible des ondes de plissement du matériau.

13° La résistance en compression, ainsi que les compressions critiques et le facteur d'amplification, dépendent des conditions aux limites de la région comprimée, de la forme de cette région, du gradient de la compression, etc.

Annexe 1

**THÉORIE CLASSIQUE DU FLAMBEMENT  
DES CORPS MINCES**

Nous démontrons que la théorie des barres et des plaques constitue un cas spécial de nos équations. Considérons une barre à l'axe  $x_1 = x$ , avec la charge P. Les contraintes initiales sont  $S_x = S_{11} = P/F$ ,  $S_y = S_z = 0$ , où F est la surface de la section. Dans le plan  $(x, z)$  l'équation (23) fournit :

$$F_z^* = S_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (55)$$

ce qui se traduit dans toute la section par une charge transversale égale à  $p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ . L'accord avec la solution bien connue [13] est évident.

Examinons encore une plaque mince dans le plan  $(x, y)$  aux contraintes initiales  $S_{11} = S_x/S_{22} = S_y$ ,  $S_{12} = S_{xy}$ ,  $S_z = S_{xz} = S_{yz} = 0$ . Selon (23) nous obtenons :

$$F_z^* = S_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + S_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (56)$$

ce qui est l'expression bien connue ([13], page 348).

L'accord avec les solutions techniques a été déjà démontré par PEARSON [11] par la méthode variationnelle, c'est-à-dire comme minimum de l'expression particulière pour  $U_1$  et  $U_0$ . Il a vérifié aussi l'accord

avec la théorie de l'instabilité à la flexion plane des poutres et l'accord avec la théorie d'une coque cylindrique sous pression extérieure hydrostatique.

Les mêmes expressions valent aussi pour une barre ou une plaque, si l'on tient compte des cisaillements dus aux efforts tranchants, comme dans les plaques sandwich.

NOTE. Par contre, la théorie de BIOT [2] qui donne pour les barres et plaques sans cisaillement les mêmes expressions, aboutit ici à des expressions différentes. Pour le démontrer, écrivons l'hypothèse des sections planes d'une barre, compte tenu des cisaillements :  $w = w(x)$ ,  $u = (z - w) \psi(x)$ , où  $\psi$  est la rotation de la section plane,  $\psi + \partial w / \partial x$  étant l'angle de cisaillement. L'équation (23) procure toujours (55), tandis que (24e) aboutit à

$$F_z^* = S_x \left( \frac{3}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right),$$

ce qui n'est pas en accord avec la théorie technique de ces barres et plaques. La même affirmation vaut pour [10 a].

Annexe 2

**LA PRESSION HYDROSTATIQUE**

La pression hydrostatique P d'un gaz ou d'un liquide ne constitue pas un cas de charge « morte », car elle change de direction pendant le changement  $u_i$  de déformation. PEARSON a montré [11] qu'à l'expression  $U_1 + U_0$  il faut encore ajouter dans l'inégalité (10) l'expression :

$$U_3 = \int_{(S_P)} \frac{1}{2} (n_l u_l u_{k,k} - n_k u_l u_{k,l}) P \, dS_P. \quad (57)$$

Nous pouvons l'écrire aussi sous la forme :

$$U_3 = \int_{(S_P)} \frac{1}{2} n_r \varepsilon_{prq} \varepsilon_{plk} u_l u_{k,q} P \, dS_P \quad (57a)$$

car  $\varepsilon_{plk} \varepsilon_{prq} = \delta_{lr} \delta_{kq} - \delta_{lq} \delta_{kr}$  [3], [9];  $\varepsilon_{ijk}$  est le symbole de LEVI-CIVITE ( $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ ,  $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$ , pour les autres combinaisons 0). Donc, dans toutes les expressions (15) il faut ajouter la variation :

sons 0). Donc, dans toutes les expressions (15) il faut ajouter la variation :

$$\delta \int_{(S_P)} J_3(u_i, u_{i,j}) \, dS_P = \int_{(S_P)} \frac{\partial J_3}{\partial u_i} \delta u_i \, dS_P + \int_{(S_P)} \frac{\partial J_3}{\partial u_{i,j}} (\delta u_{i,j}) \, dS_P \quad (58)$$

où  $J_3$  dénote l'expression intégrée dans (57) ou (57a). On peut calculer :

$$\frac{\partial J_3}{\partial u_i} = \frac{1}{2} P (n_i u_{k,k} - n_k u_{k,i}) \quad (59)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial u_{i,j}} = \frac{1}{2} n_r \varepsilon_{prj} \varepsilon_{pli} u_l P \quad (60)$$

et à l'aide de (60) écrire la dernière intégrale dans (58) sous la forme :

$$- \int_{(S_P)} \frac{1}{2} n_r \varepsilon_{prj} \varepsilon_{pli} (u_l P)_{,j} \delta u_i dS_P + \\ + \int_{(S_P)} \frac{1}{2} n_r \varepsilon_{rjp} (\varepsilon_{pli} u_l P \delta u_i)_{,j} dS_P.$$

Ici nous pouvons transformer la première intégrale selon la relation  $\varepsilon_{pli} \varepsilon_{prj} = \delta_{lr} \delta_{ij} - \delta_{lj} \delta_{ir}$  [12] et pour la seconde intégrale nous pouvons utiliser le théorème de STOKES [12] ce qui la transforme en une intégrale le long d'une courbe  $L_P$ , limitant la surface  $S_P$  chargée par  $P$ . Or, nous obtenons :

$$- \int_{(S_P)} \frac{1}{2} [n_i (u_l P)_{,i} - n_i (u_j P)_{,j}] \delta u_i dS_P + \\ + \int_{(L_P)} \frac{1}{2} P \varepsilon_{ijk} u_i \delta u_j \nu_k dL_P \quad (61)$$

où  $\nu_i$  est le vecteur unité de la tangente de la courbe  $L_P$ .

Par substitutions de (59) et (60) dans (58) et leur introduction dans (22) nous obtenons les conditions suivantes à la surface chargée par les forces « mortes »  $P_i$  et la pression hydrostatique  $P$  :

$$n_j \sigma_{ij} + (P_j + P n_j) u_{i,j} + \\ + \left\{ P n_i u_{i,j} - P n_j u_{j,i} + \frac{1}{2} n_i u_j P_{,j} - \frac{1}{2} n_j u_i P_{,i} \right\} = 0 \quad (62)$$

On peut aussi écrire l'expression { ... } plus brièvement sous la forme  $n_r \varepsilon_{pil} \varepsilon_{prj} (u_{i,j} P + \frac{1}{2} u_i P_{,j})$ . Si tout le corps n'est pas plongé dans le liquide ou le gaz, il faut qu'à la courbe  $L_P$  on ait  $P = 0$  (surface de liquide) ou  $u_i = 0$ , ce qui est d'habitude satisfait. Notons que NOVOZHILOV dans sa théorie obtient simplement le terme  $\frac{1}{2} P n_j (u_{i,j} - u_{j,i})$  ([10a], éq. V. 30).

### Annexe 3

#### REMARQUES SUR LE MODÈLE DE MICROSTRUCTURE

Le treillis de la figure 7a, b, comme modèle de microstructure, a l'avantage d'être bidimensionnel et de réagir dans le sens  $x$  comme dans le sens  $y$ . Il est une fois hyperstatique. (Un treillis isostatique, triangulaire par exemple, serait incapable d'exprimer l'interaction des deux phases, qui est hyperstatique.) Cependant, pour le béton, ce treillis a encore le défaut d'être orthotrope (avec  $E_{xx} = E_{zz}$ ,  $E_{zz} = E_{xx}$ ). Mais l'isotropie presque parfaite peut être atteinte (expériences avec des plastiques renforcés par fibres dans les quatre directions) en superposant les deux treillis  $a$  et  $b$ , décalés de 45°. Pour les calculs, on pourrait approximativement supposer que les volumes des barres fortes ainsi que des barres faibles des treillis  $a$  et  $b$  sont égaux et que leur rapport mutuel est égal au rapport  $V_g/V_m$  des volumes des grains et de la matrice. Les sections des barres fortes et faibles sont alors :

$$F_g = 2 C V_g \quad \text{et} \quad F_m = C V_m \sqrt{2}.$$

Dans le cas d'une porosité  $V_p$ , on pourrait réduire ces sections en les multipliant par  $(1 - V_p)$ . Le coefficient  $C$  pourrait être déterminé en considérant que pour le cas limite  $E_m = E_g$  (même si pour ce cas le modèle est incorrect) le module du treillis est égal à cette valeur. Encore que moins approximativement, il faudrait considérer l'influence de la couche de matrice de volume  $V_c$ , dans la zone de contact des grains, et s'imaginer qu'une petite partie  $\delta$  de la longueur unité des barres fortes est constituée aussi par la matrice :

$$F_g = 2 C V_g / (1 - \delta), \quad F_m = C (V_m - V_c) \sqrt{2}$$

où le volume  $V_c = 2 F_g \delta$  dépend de la densité du béton.

Plus exactement encore il faudrait généraliser le treillis à trois dimensions (7 fois hyperstatique au lieu de 1 fois), et distinguer deux sortes de diagonales des cubes.

\* \* \*

L'auteur tient à remercier ici M. R. L'HERMITE, Directeur général de la Recherche de l'Union technique interfédérale du Bâtiment et des Travaux publics, pour ses bons conseils quant à la conception du problème, ainsi que M. E. ABSI, Ingénieur principal au Centre expérimental de Recherches et d'Études du Bâtiment et des Travaux publics, et M. D. JEJČIĆ, Ingénieur à la Direction générale de la Recherche de l'U.T.I., pour leurs très avisées critiques qui l'ont amené à revoir son exposé avant d'en donner la version finale.

## RÉFÉRENCES

- [1] BIOT M. A. — *Non-linear theory of elasticity and the linear case for a body under initial stress*. Philosophical Magazine, série 7, vol. 27, pp. 468-469, 1939.
- [2] BIOT M. A. — *Mechanics of incremental deformations*. Wiley & Sons, New York, 1965.
- [3] BUFLER H. — *Die Druckstabilität rechteckiger Verbundplatten*. Ing. Archiv, 1965, n° 2, p. 109.
- [4] COLLATZ L. — *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen*. Akad. Ver. Geest & Portig, Leipzig, 1963.
- [4a] FREUDENTHAL A. M. — *The inelastic behavior of engineering materials and structures*, chap. 11. Wiley & Sons, New York, 1950.
- [5] GREEN A. E., ADKINS J. E. — *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*, chap. 9. Clarendon Press, Oxford, 1960.
- [5a] HADAMARD J. — *Leçons sur la propagation des ondes*, chap. VI. Hermann, Paris, 1903.
- [6] HILL R. — *On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain*. J. of the Mechanics and Physics of Solids, 1957, pp. 229-241.
- [7] L'HERMITE R. — *Idées actuelles sur la technologie du béton*. Documentation technique du Bâtiment et des Travaux publics, Paris, 1955, pp. 115-133.
- [8] L'HERMITE R. — *Résistance des matériaux*. Tome I. Dunod, Paris, 1954.
- [9] NEUBER H. — *Die Grundgleichungen der elastischen Stabilität in allgemeinen Koordinaten und ihre Integration*. Zeitschrift der Angew. Math. u. Mechanik, 1943, vol. 23, pp. 321-330.
- [10] NEUBER H. — *Theorie der elastischen Stabilität bei nichtlinearer Vorverformung*. Acta Mechanica, 1965, n° 3, p. 285. Springer, Vienne.
- [10a] NOVOZHILOV V. V. — *Fondements de la théorie non linéaire de l'élasticité* (en russe). Tehteorizdat, Moscou-Leningrad, 1948 (trad. anglaise Graylock Press, Rochester, 1953).
- [11] PEARSON C. E. — *General theory of elastic stability*. Quarterly of Applied Mathematics, 1956, XIV, n° 2, pp. 133-144.
- [12] PRAGER W. — *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Birkhäuser, Basel, 1961 (trad. : *Introduction to mechanics of continuous media*. Ginn, New York, 1961).
- [13] TIMOSHENKO S. P., GERE J. M. — *Theory of elastic stability*. Mc Graw-Hill, New York, 1961, 2<sup>e</sup> édition.
- [14] TRUESDELL C. — *The non-linear field theories of mechanics*, in : *Handbuch der Physik*, Band III/3, Ed. S. FLÜGGE. Springer, Berlin, 1965, chap. 68-70.