

Finite Elemente in der Bruchmechanik

Herausgegeben von
H.-P. Rossmann

Springer-Verlag Wien New York

1982



BRUCHMECHANIK VON STAHLBETON

Z.P. BAŽANT, L. CEDOLIN und P. GAMBAROVA

Aus dem Englischen übersetzt und überarbeitet von
H.P. ROSSMANITH und H.A. MANG

1. Einleitung

Bei der bruchmechanischen Untersuchung bewehrter Betonbauteile treten im wesentlichen zwei Problemkreise auf, nämlich (a) die sogenannte "Objektivität" der im Rahmen der verwendeten Finite Elemente-Methoden (FEM) benützten Kriterien zur Berücksichtigung der Rißausbreitung und andererseits (b) die Einbeziehung der Bewehrung in das "Betonkontinuum". Diese beiden Themenkreise sollen im folgenden im Detail behandelt werden.

Die Spannungs- und Verformungsanalyse eines Bauteils muß mit "objektiven" Methoden durchgeführt werden, d.h. sich ergebende physikalische Größen wie Verschiebung, Dehnung, Spannung und Spannungsintensitätsfaktoren müssen, von üblichen Diskretisierungsfehlern abgesehen, von den geometrischen Eigenschaften der verwendeten finiten Elemente unabhängig sein. Dies ist so zu verstehen, daß bei zunehmender Verfeinerung der Diskretisierung das Ausmaß der Abhängigkeit der erwähnten physikalischen Größen von der Diskretisierung immer mehr abnimmt und im praktisch nicht realisierbaren Grenzfall keine derartige Abhängigkeit mehr vorliegt.

Die Bruchmechanik findet derzeit zunehmend Eingang in die Mechanik des bewehrten und unbewehrten Betons. Dies geschieht

durch Berücksichtigung "verschmierter" paralleler Risse, was sich in einer Reduktion der Steifigkeit normal zu derartigen Rißbändern äußert, oder durch Verwendung von Elementen mit eingebauter Rißspitzensingularität. Als Rißausbreitungskriterium wird ein sogenanntes Festigkeitskriterium verwendet, das dann anspricht, wenn die maximale Hauptzugspannung die Zugfestigkeit überschreitet. Die Methode der "verschmierten" Risse bewährt sich insbesondere bei Traglastberechnungen von Bauteilen, die im Ausgangszustand keine Makrorisse aufweisen. In der vorliegenden Arbeit wird ein früher für unbewehrten Beton entwickeltes Energiekriterium für aus "verschmierten Rissen" bestehenden Rißbändern auf bewehrten Beton verallgemeinert. Dieses Kriterium berücksichtigt auch den Verbundschluss. Es ist, von üblichen Diskretisierungsfehlern abgesehen, invariant (objektiv) bezüglich der Netzteilung (Diskretisierung).

2. Herkömmliche Kriterien für die Rißausbreitung

Anhand eines Beispiels sei die herkömmliche Vorgangsweise bei der Feststellung der Rißausbreitung im Zusammenhang mit FE-Programmen kritisch betrachtet.

Gegeben sei eine rechteckige Stahlbetonscheibe der Dicke 1, Breite $2b$ und Höhe $2L$. Die Bewehrung besteht aus einem regulären Rechtecksnetz (s. Abb.1). Die Scheibe sei durch eine gleichförmig verteilte Normalspannung σ_0 an der oberen und unteren Begrenzung belastet. Oberdies weise die Scheibe einen symmetrischen, horizontalen Riß (Zentralriß) bzw. ein Rißband der Länge $2a$ ($0 < a < b$) auf. Wir setzen $\sigma_0 = 0,981 \text{ MN/m}^2$ und berechnen für verschiedene Rißlängen a den kritischen Lastparameter α , der gerade Rißfortschritt verursacht. Nach den bruchmechanischen Grundformeln ist α eine Funktion von der Rißlänge. Von üblichen Diskretisierungsfehlern abgesehen, sollte α von der Netzteilung unabhängig sein.

Zur Überprüfung ob und inwieweit die Unabhängigkeit von α von der Netzteilung bei Verwendung des herkömmlichen Rißausbreitungskriteriums im Rahmen der FEM gegeben ist, betrachten wir drei verschiedene Netzteilungen. A, B und C (s. Abb.1) mit Maschenweiten $\Delta a = 0,04, 0,02$ und $0,01$ m. Für das vorliegende

Maschenweiten zueinander an. Quadratelemente mit vier Knoten werden als Finite Elemente gewählt. Jedes Quadratelement besteht aus zwei Dreiecken, für die lineare Verschiebungsansätze gewählt werden. Die Verwendung Finiter Elemente mit Verschiebungsansätzen höherer Ordnung bedingt keinen wesentlichen Unterschied in der bruchmechanischen Analyse.

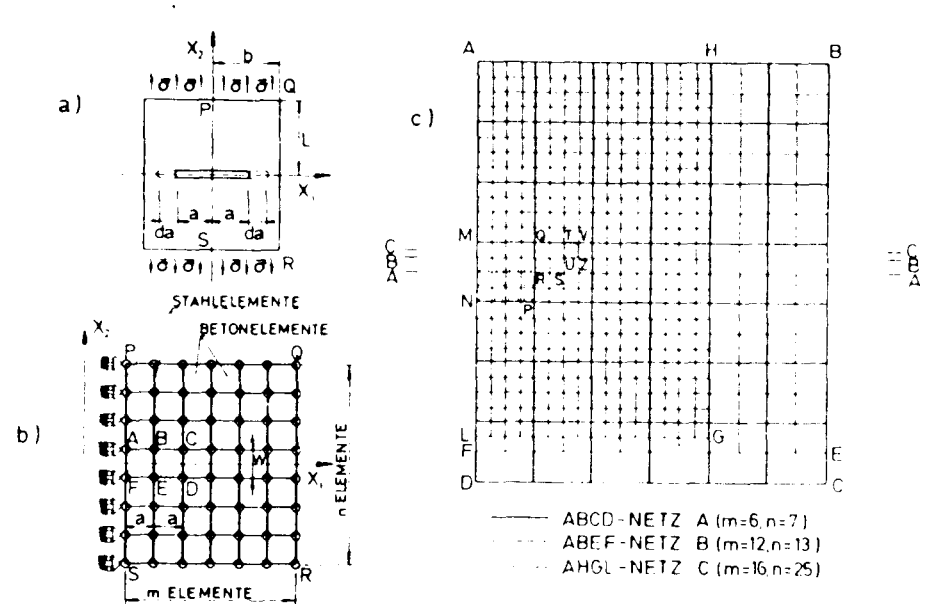


Abb. 1. Stahlbetonscheibe und Finite-Elemente-Netzteilungen

Der Riß wird mittels eines ein Element breiten Rißbandes gleichförmig verteilter ("verschmierter") horizontaler Risse zu beiden Seiten der Symmetrieachse modelliert.

Der Bruchvorgang innerhalb des gerade reißen Elementes wird durch Reduktion der Dehnsteifigkeit quer zu den Rissen und Nullsetzen der Schubsteifigkeit berücksichtigt, während die Steifigkeit parallel zu den Rissen unverändert bleibt. Diese Annahmen führen zu einer orthotropen Steifigkeitsmatrix für den gerissenen Beton. Um das Bruchband einerseits längs der Symmetrielinie vorschreiten lassen und andererseits Netzabstufungen ganzzahligen Verhältnisses (4:2:1) beibehalten zu

lichen Höhen, wie aus Abb. 1 ersichtlich ist.

Das Bruchband breitet sich in Richtung einer Hauptnormalspannung (im gegebenen Fall horizontal und geradlinig) sprunghaft aus. Dabei schreitet die stumpfe Bruchbandfront von einem quadratischen Element zum nächsten vor (vgl. die Elemente MNPQ, QRST und TUVZ für die drei Netze in Abb. 1c).

Weitere Berechnungsangaben sind: Elastizitätsmodul des Betons, $E_c = 225\,630 \text{ MN/m}^2$, Poisson-Zahl des Betons, $\nu_c = 0.2$; für den ebenen Spannungszustand (ESZ) gilt: $E'_c = E_c$ und $\nu'_c = \nu_c$; für den ebenen Verzerrungszustand (EVZ) gilt: $E_c = E'_c / (1 - \nu_c^2)$ und $\nu'_c = \nu_c / (1 - \nu_c)$.

Die Bewehrung wird durch ein Rechtecknetz von Stahlstäben ($E_s = 10 E_c$) modelliert. Die Bewehrungsdichte soll mindestens dem feinsten FE-Netz entsprechen. In diesem Fall geht durch jeden Knoten aller drei Netze ein Bewehrungsstab.

Bei der herkömmlichen Methode zur Berücksichtigung der Rißausbreitung schreitet das Bruchband in das nächste Element dann vor, wenn die größte Hauptnormalspannung im Beton in diesem Element die Zugfestigkeit f'_t (hier stets mit $f'_t = 3.194 \text{ MN/m}^2$ angenommen) des Betons erreicht oder überschreitet.

In unserem Fall vergleichen wir f'_t mit dem Durchschnittswert der jeweils konstanten Spannungen in den beiden Dreieckselementen, die das Quadratischelement bilden. Für die Bewehrung wird normalerweise kein Verbundschluss berücksichtigt, d.h. die Elemente, die die Bewehrung repräsentieren, sind als starr in den Elementsknoten mit den Betonelementen verbunden zu denken.

Numerische Resultate in den Abb. 2a und 2b für unbewehrten Beton ($p=0$ %) und bewehrten Beton ($p=0.8$ %) sind durch die voll ausgezogenen Linien dargestellt. Offensichtlich ergeben sich große Unterschiede in den α -Werten für die drei verwendeten Netzteilungen. Das beschriebene Hauptnormalspannungskriterium ist somit offenkundig nicht netzinvariant ("objektiv"), da durch geschickte Netzteilung jedes gewünschte Resultat erzielt

Dies gilt sowohl für unbewehrten als auch für bewehrten Beton. Bei hinreichend kleinem α kann der kritische Wert für den Lastparameter α für Rißfortschritt beliebig klein gemacht werden. Für $\alpha \rightarrow 0$ folgt $a \rightarrow 0$ für beliebige Rißlänge a . Konvergenz ist somit zwar gesichert, sie erfolgt jedoch gegen einen offensichtlich falschen Wert. Das erhaltene Ergebnis ist damit erklärbar, daß die Spannungskonzentration vor dem Rißband von der Breite eines Elementes mit zunehmend feinerer Netzteilung monoton ansteigt.

Auf Spannungen beruhende Bruchkriterien sind im allgemeinen nur dann "objektiv" (im Sinne von invariant in bezug auf die Netzteilung), wenn sie vom "plastischen Typ" sind, d.h., wenn die Spannung konstant gehalten wird, wenn die Bruchbedingung erfüllt ist. Dies ist gleichbedeutend mit dem Auftreten plastischer Zonen in der Bruchmechanik metallischer Werkstoffe. Wird die Spannung jedoch reduziert, so wird das Bruchkriterium "unobjektiv". Betonfachleute betrachten oft den Vorgang des "Zerdrückens" ("crushing"), welcher eintritt, wenn eine bestimmte Druckfestigkeit erreicht wird. In unserem Beispiel wird bei Umkehr des Vorzeichens der Last und der Spannungen das Element MNPQ "zerdrückt", d.h. seine Spannung σ_{yy} ist auf Null abgesunken, was eine Spannungskonzentration im Element davor induziert. Die Wahl einer kleineren Elementsgröße konzentriert den "Zerdrückbereich" in das kleinere Element QRST, und die Spannungskonzentration im Element wird bei gleicher Last höher. Im Grenzfall verschwindender Elementgröße geht die Spannung vor der Front des Zerdrückbereichs für die gleiche Last über alle Grenzen, oder, falls diese Spannung durch die Druckfestigkeit des Werkstoffs begrenzt ist, geht die für die Ausbreitung des Druckbereiches notwendige Last fälschlicherweise gegen Null.

3. Energiekriterium für die Ausbreitung des Bruchbandes

Ein objektives Bruchkriterium ist aus energetischen Betrachtungen ableitbar. Die Rißausbreitungskraft oder Energiefreisetzungsrates \mathcal{G} (d.h. derjenige Energieanteil, welcher zum Fort-

$$G = - \frac{\partial U}{\partial a} \frac{1}{B} \quad (1)$$

gegeben, wobei U die potentielle Energie der Gesamtstruktur als Funktion der Bruchbandlänge a ist und B die Scheibendicke ist.

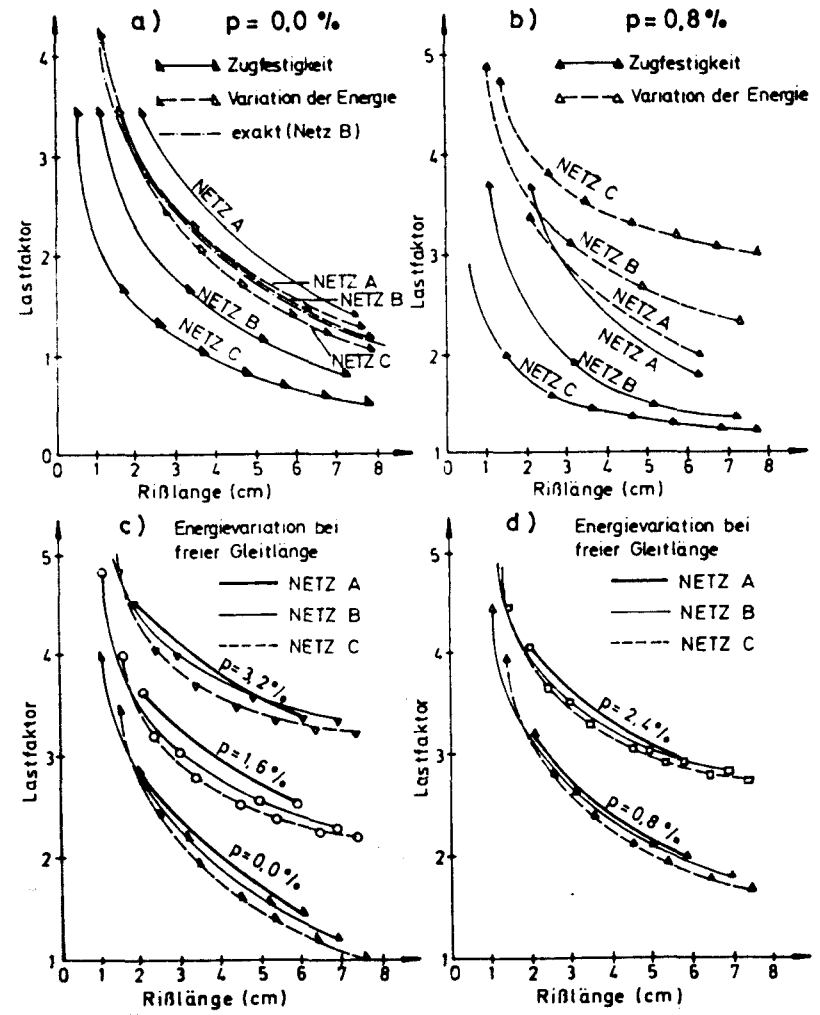


Abb. 2. Ergebnisse für die Netzteilungen A, B und C bei Verwendung des Zugspannungs- bzw. des Energiekriteriums als Bruchkriterium bei Berücksichtigung bzw. Nichtberücksichtigung von Gleitverbund zwischen der Bewehrung und umgebenden Beton

Näherungsweise gilt für B = 1

$$G \approx - \frac{\Delta U}{\Delta a} \quad (2)$$

mit Δa als dem der Elementsseitenabmessung gleichgesetztem Vor-schritt des Bruchbandes. In den Abbildungen wird für einen Riß-vorschritt von a auf a + Δa als theoretische Rißlänge a + Δa/2 angesehen.

Bruchvorschritt tritt ein, wenn das Bruchausbreitungskriterium

$$G = G_{cr} \quad (3)$$

erfüllt ist. G_{cr} ist dabei die kritische Bruchzähigkeit oder Bruchfestigkeit für Beton. Sie stellt einen Materialkennwert dar. Die Objektivität dieses Kriteriums ist durch die Tatsache gewährleistet, daß G von der Elementgröße unabhängig ist.

In der Bruchmechanik verwendet man üblicherweise den Spannungs-intensitätsfaktor K bzw. seinen kritischen Wert

$$K_{cr} = \{E'_c G_{cr}\}^{1/2} \quad (4)$$

zur Charakterisierung des Spannungsfeldes um eine scharfe Riß-spitze; da eine solche im gegebenen Falle nicht vorliegt, findet in dieser Arbeit vorzugsweise G Verwendung.

Das Hauptnormalspannungskriterium könnte "objektiviert" werden, wenn anstelle der Zugfestigkeit f'_t eine effektive Festigkeit f_{eq} derart eingeführt würde, daß

$$f_{eq} = c \{E'_c G_{cr} / w\}^{1/2} \quad (5)$$

mit $w = \Delta a$ als Breite des Bruchbandes. Die Konstante c hängt vom Elementtyp ab. Sie weicht nicht allzu stark von 1 ab (hier ist $c=0.921$). Löst man Glg. (5) mit $f_{eq} = f'_t$ nach w auf, so ergibt sich eine Elementgröße von

$$w = w_c = E'_c G_{cr} \left(\frac{c}{f'_t} \right)^2, \quad (6)$$

die normalerweise ein Vielfaches der Größe der maximalen Zug-schlagstoffe ist (Glg. (6) gilt für unbewehrten Beton). Für viele Strukturen ist eine solch geringe Elementgröße inakzeptabel; die Vorgabe von $w = \Delta a$ entsprechend Glg. (6) erlaubt keine Netzverfeinerung.

Alle Laborversuche zur Bestätigung von Rechenergebnissen aufgrund herkömmlicher Methoden sind durch relativ kleine Proben-Größen gekennzeichnet. Die Größe der Elemente macht oftmals nur ein geringes Vielfaches der Zuschlagstoffgröße aus.

Dies erklärt die in der Literatur angeführte, zufriedenstellende Obereinstimmung mit den Testergebnissen. Man sollte jedoch vor zu großen Erwartungen bezüglich der Güte der Rechenergebnisse bei größeren Strukturen, wie z.B. Kernreaktordruckgefäßen oder Staudämmen, für welche in-situ-Tests nicht in Frage kommen, warnen.

Glg. (6) ist die Grundlage für eine indirekte Methode zur Bestimmung der Bruchzähigkeit G_{CR} unabhängig von den klassischen Bruchproben. Falls die auf f'_t beruhenden, herkömmlichen Methoden für eine bestimmte Elementabmessung w Ergebnisse liefern, die in Obereinstimmung mit den Testresultaten sind, und falls die Resultate überdies vom Wert von f'_t abhängen, dann gilt $w = w_c$ und G_{CR} ist gegeben durch:

$$G_{CR} = (f'_t/c)^2 w/E'_c \quad (7)$$

Die Anwendbarkeit bruchmechanischer Methoden auf Beton wird von manchen Experimentatoren angezweifelt. Die Differenzen zwischen bruchmechanischer Vorhersage und Experiment liegen in den zu kleinen Probenabmessungen. Für große Strukturen wie im Reaktorbau oder bei Staudämmen ist die Bruchmechanik ohne Zweifel anwendbar. Dabei ist die Frage der Verwendung eines Bruchbandes oder eines im mathematischen Sinne scharfen Risses eine Frage des numerischen Aufwandes. Die Ergebnisse an sich sind nahezu die gleichen. Was die Anwendungsbereiche der beiden erwähnten Rißausbreitungskriterien anbelangt, befindet man sich bei kleineren Bauteilen in einem Übergangsbereich vom Energiekriterium (G_{CR}) zum Festigkeitskriterium (f'_t). Die Verwendung eines ein Element breiten, stumpfen Bruchbandes bei kleinen Bauteilen mit dem gleichen G_{CR} wie für eine große Struktur trägt zum Eintritt in diesen Übergangsbereich bei (verglichen mit einem scharfen Riß). Das Verhältnis Bruchbandbreite w zu einer charakteristischen Probenabmessung D , also w/D wächst stärker gegen 1 als ein ähnliches Verhältnis für den scharfen Riß). Überdies ist G_{CR} (wie auch w_c) für kleine

Proben nicht mehr konstant, sondern nimmt mit abnehmender Proben-Größe ab. Für bewehrten Beton muß G_{CR} vom λ -Anteil der Bewehrung abhängen wie auch von der Größe und dem Abstand der Bewehrungsstäbe. Die Berücksichtigung dieses komplexen Sachverhaltes würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Wir nehmen hier an, G_{CR} sei a priori gegeben.

4. Bestimmung der Rißausbreitungskraft

Zur Berechnung der Rißausbreitungskraft G oder, anders ausgedrückt, der Freisetzungsrates der Verzerrungsenergie, $\partial U/\partial a$, betrachtet man ein einfacheres, ähnliches Modell, bei dem das Bruchband durch eine Kerbe von der Breite eines Elementes ersetzt wird. Durch Wegschneiden des Materials im Volumenelement ΔV (s. Abb. 3a) realisieren wir den Vorschnitt der Kerbe. Der Unterschied zwischen dem Bruchband und der Kerbe liegt darin, daß das Volumen ΔV , welches beim Bruchband nicht weggeschnitten sondern nur gerissen ist, nur die Fähigkeit verliert, Spannungen normal zu den Rissen zu übertragen, Normalspannungen parallel zu den Rissen werden hingegen übertragen.

Die Bewehrung wird als "verschmiertes Kontinuum" betrachtet; unter der Annahme vollen Verbundes sind die Verzerrungen ϵ_{ij} im Beton und in der Bewehrung dieselben. Für die Spannung im Komposit gilt

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^C + \sigma_{ij}^S, \quad (8)$$

wobei σ_{ij}^C und σ_{ij}^S die vom Beton und der Bewehrung übertragenen Spannungsanteile sind. Das orthogonale Bewehrungsnetz ist durch die zwei Parameter p_1 und p_2 ($p_1 = F_i \text{ Stahl}/F_{\text{Komposit}}$; F_{\dots} Fläche), charakterisiert. Es gilt

$$\sigma_{11}^S = p_1 \sigma_{s11}, \quad \sigma_{22}^S = p_2 \sigma_{s22}, \quad \sigma_{12}^S = 0 \quad (9)$$

mit σ_{s11} und σ_{s22} als den Spannungen in den Bewehrungsstäben parallel zu x_1 und x_2 .

Verallgemeinerung auf schiefwinkelige Bewehrungsnetze führt auf

$$\sigma_{ij}^S = \sum_{\alpha} c_{ki}^{\alpha} c_{mj}^{\alpha} p_{\alpha} \sigma_{s_{km}}^{\alpha} \quad (10)$$

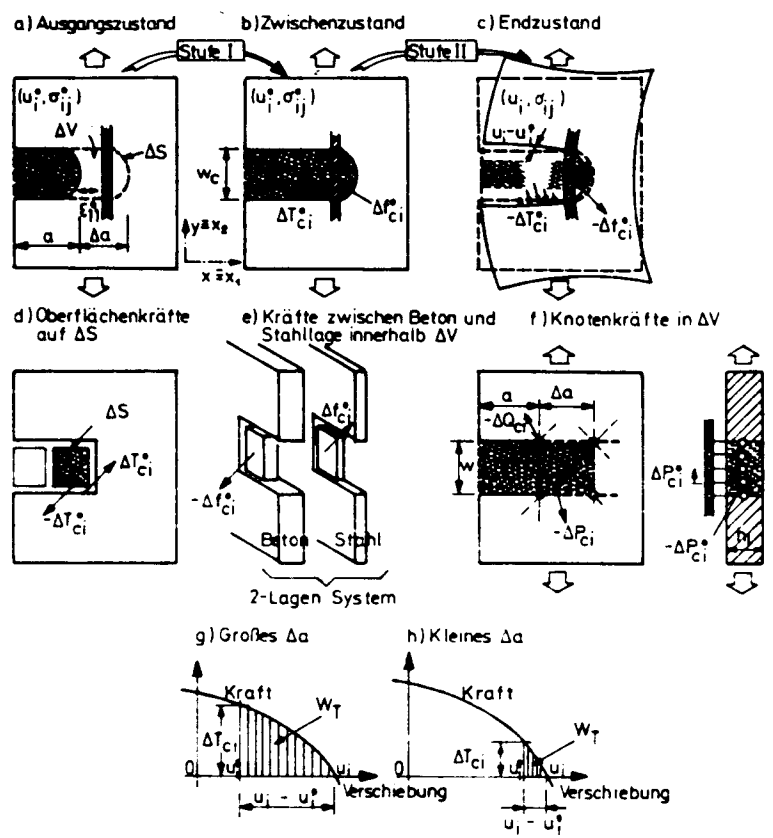


Abb. 3. Ausbreitung des Bruchbandes und maßgebende Kraftdiagramme

mit σ_{sij}^a als dem Tensor der einachsigen Spannung des Bewehrungsteiles a und c_{ki}^a als der Matrix der Richtungskosinus.

Der Vorschritt des Bruchbandes kann als 2-Stufenprozeß angesehen werden:

1. Stufe: Wir denken uns in ΔV Risse parallel zu x_1 geschnitten und gleichzeitig Oberflächenkräfte ΔT_{Ci}^0 auf dem Rand ΔS des Volumenelementes ΔV und Volumskräfte Δf_{Ci}^0 in ΔV angebracht, derart, daß ΔT_{Ci}^0 und Δf_{Ci}^0 die ursprüngliche Wirkung des Betons in ΔV (ohne die Bewehrung) auf den restlichen Beton mit dem Volumen $(V - \Delta V)$ und die Bewehrung innerhalb von ΔV ersetzen.

(s. Abb. 3d und 3e). Man beachte, daß die Δf_{Ci}^0 in Wirklichkeit Verbundkräfte zwischen Stahl und Beton sind, daß sie im "verschmierten" Kompositmodell aber als Volumskräfte auftreten (s. Abb. 3e). Damit erhält man einen Gleichgewichtszustand (Metazustand), und alle Verschiebungen und somit auch die Verzerrungen sind unverändert gehalten. Man spricht von einem "eingefrorenen" Verschiebungs- bzw. Verzerrungszustand.

2. Stufe: Sogenanntes "Auftauen des Systems", gekennzeichnet durch Absenken von ΔT_{Ci}^0 und Δf_{Ci}^0 auf Null (bzw. langsames Anbringen von $-\Delta T_{Ci}^0$ und $-\Delta f_{Ci}^0$), wobei die ursprünglichen Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen u_i^0, ϵ_{ij}^0 und σ_{ij}^0 in den Endzustand u_i, ϵ_{ij} und σ_{ij} übergehen. Im Betonvolumen ΔV (ohne Bewehrungsanteil) gilt beim Rißvorschritt vom Anfangszum Zwischenzustand:

$$\Delta \sigma_{11}^C = \sigma_{11}^C - E'_C \epsilon_{11}^0 = \frac{E'_C}{1-\nu'_C} (\epsilon_{11}^0 + \nu'_C \epsilon_{22}^0) - E'_C \epsilon_{11}^0 \quad (11)$$

$$\Delta \sigma_{22}^C = \sigma_{22}^0, \quad \Delta \sigma_{12}^C = \sigma_{12}^0$$

Da sich nach Voraussetzung die Risse im Bruchband parallel zu x_1 ausbreiten (normal zur Richtung der Hauptspannung), muß die Schubspannung im Element direkt vor der Bruchbandfront Null sein; daher $\Delta \sigma_{12}^C = 0$.

Am Ende der ersten Stufe (Metazustand) sind die Spannungen in der Struktur unverändert, mit Ausnahme der Spannungen im Beton in ΔV , worin die Spannung σ_{22}^C verschwindet und nur die Spannung $\sigma_{11}^C(I) = E'_C \epsilon_{11}^0$ verbleibt.

Die Änderung der potentiellen Energie zufolge von Reißen des Betons im Volumen ΔV ist gleich der beim Reißen des Betons freigesetzten Verzerrungsenergie, nämlich

$$\Delta W_{(\Delta V)} = - \frac{1}{2} \int_{\Delta V} [\sigma_{ij}^C \epsilon_{ij}^0 - E'_C (\epsilon_{11}^0)^2] dV \quad (12)$$

Beim Übergang vom Zwischenzustand zum Endzustand (Zustand II) findet kein Reißen statt, d.h. keine Energiedissipation, sodaß die Änderung der potentiellen Energie der Gesamtstruktur $\Delta V + (V - \Delta V)$ nur aus der (negativen) Arbeit beim Entspannen

der äußeren Kräfte $\Delta T_{C_i}^0$ und $\Delta f_{C_i}^0$, oder, anders ausgedrückt, zufolge Aufbringens von $-\Delta T_{C_i}^0$ und $-\Delta f_{C_i}^0$ besteht:

$$\Delta W_T = \frac{1}{2} \sum_{\Delta S} \Delta T_{C_i}^0 (u_i - u_i^0) dS + \frac{1}{2} \sum_{\Delta V} \Delta f_{C_i}^0 (u_i - u_i^0) dV \quad (13)$$

Oberflächenanteil Volumenanteil

ΔW_T stellt diejenige Arbeit dar, die von der Wirkung des Restes der betrachteten Scheibe auf das gerissene Betonvolumenelement ΔV herrührt.

Die während des Bruchbandvorschlages aufgebrauchte gesamte potentielle Energie ΔU setzt sich aus der RiBoherflächenenergie in ΔV und der dissipierten Wärmeenergie zusammen:

$$\Delta U = \Delta W_{(\Delta V)} + \Delta W_T \quad (14)$$

Dies ist die grundlegende Gleichung für die Bruchmechanik von Stahlbeton.

Bei nichtlinearem Materialverhalten innerhalb von $V-\Delta V$ und Fließen der Bewehrung innerhalb von $V-\Delta V$ und ΔV ist Glg. (13) zu modifizieren /1/. Falls Δa hinreichend klein ist (was oft der Fall ist) kann Glg. (13) auch im nichtlinearen Fall verwendet werden /1/. Dies ist aus den Abb. 3g und 3h ersichtlich: die Fläche W_T in Abb. 3g und 3h repräsentiert $\Delta T_{C_i}^0 du_i$. Im Grenzfall degeneriert sie zu einem Dreieck.

Falls sich das Material außerhalb von ΔV , d.h. außerhalb der Bruchprozeßzone, nichtlinear verhält, wobei die Nichtlinearität auf die Bruchprozeßzone beschränkt bleiben möge, dann muß das ein-Element-breite Bruchband mit der aktuellen Bruchbandbreite w_c für das Material zusammenfallen, es muß also gelten $w = w_c$ (s. Abb. 4). Dies ist notwendig, da der Energiefluß aus $V - \Delta V$ in das Volumen ΔV nicht unabhängig von der Wahl der Oberfläche ΔS ist. Bei linear elastischem Materialverhalten außerhalb von ΔV hingegen ist dieser Energiefluß von der Wahl von ΔS unabhängig. Der erwähnte Sachverhalt ist völlig analog zur Bruchmechanik elastischer bzw. elasto-plastischer, metallischer Werkstoffe. Die Verwendung des J-Integralkonzeptes zur Berechnung von ΔW_T würde die Verwendung "beliebig" breiter Bruchbänder gestatten.

Bei Anwendung der FEM werden die verteilten Kräfte $\Delta T_{C_i}^0$ und $\Delta f_{C_i}^0$ durch Knotenkräfte ersetzt. Glg. (14) lautet dann:

$$\Delta U = - \sum_{\Delta V} \frac{1}{2} \int [\sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}^0 - E_c' (\epsilon_{11}^0)^2] dV + \sum_{(i, \Delta S)} \left[\frac{1}{2} \Delta Q_{C_i}^0 (u_i - u_i^0) \right]_{\Delta S} + \sum_{(i, \Delta V)} \left[\frac{1}{2} \Delta P_{C_i}^0 (u_i - u_i^0) \right]_{\Delta V} \quad (15)$$

mit $\Delta Q_{C_i}^0$ als Knotenkräften zufolge der Oberflächenkräfte $\Delta T_{C_i}^0$ und $\Delta P_{C_i}^0$ als Knotenkräften zufolge der Volumskräfte $\Delta f_{C_i}^0$.

Die Kräfte $-\Delta Q_{C_i}^0$ und $-\Delta P_{C_i}^0$ können direkt als Knotenkräfte berechnet werden, die auf den Beton auf ΔS und innerhalb von ΔV wirken und in ΔV im Gleichgewicht mit den Spannungen nach Glg. (11) stehen. Falls Beton und Bewehrung an inneren Elementsknoten als nicht unter Verbund stehend berücksichtigt werden (Abb. 3f) (ein Vorgang, der manchmal bei der Modellierung der Bewehrung angewendet wird), gilt $\Delta P_{C_i}^0 = 0$, und die letzte Summe in der Glg. (15) entfällt. Fällt die Mittellinie des Bruchbandes mit einer Symmetrielinie des Elementes ΔV zusammen, dann gibt es aufgrund von Symmetrie keine Kraftübertragung von der Bewehrung auf den Beton entlang der gesamten Symmetrieachse. Im Falle von Symmetrie reicht es hin, Integrationen und Summationen in Glg. (15) nur über die eine Hälfte des Netzbereiches durchzuführen.

Mit Hilfe der Bruchbandmethode wurde das eingangs diskutierte Beispiel für den Fall vollen Verbunds, gekennzeichnet durch Nichtberücksichtigung des Schlupfes zwischen der Bewehrung und dem umgebenden Beton, nochmals gerechnet. Der Berechnung wurde $G_{acr} = 2.133 \text{ N/m}$ zugrunde gelegt. Dies führt für das größte Netz auf $f_{eq} = f'_t$.

Die Abb. 2a und 2b enthalten den Lastparameter α als Funktion der Rißlänge a für unbewehrten ($p=0$) und bewehrten ($p=0.8$) Beton. Für unbewehrten Beton fallen bei Verwendung des Energiekriteriums die Kurven für die drei Netze fast zusammen; sie werden mit der Lösung für einen scharfen Riß in einer Scheibe mit der Geometrie des Netzes B verglichen. Für den bewehrten Beton divergieren die Kurven mit wachsendem a .

Genauere Untersuchungen zeigen, daß der Verlust der "Objektivität" des erläuterten Energiekriteriums eine Folge der Nichtberücksichtigung von Gleitverbund zwischen der Bewehrung und dem umgebenden Beton ist. Üblicherweise werden die Bewehrungsstäbe als mit dem umgebenden Beton in allen Elementsknoten steif verbunden betrachtet. Die Steifigkeit des Abschnittes eines Bewehrungsstabes, der zwei Knotenpunkte auf gegenüberliegenden Ufern eines stumpfen Risses mit der Rißbreite w verbindet, ergibt sich, auf die Einheit der Rißbreite bezogen, zu

$$k_s = p h E_s / w, \quad (16)$$

wobei h die Scheibendicke ist. Mit feiner werdender Netzteilung wird $w \rightarrow 0$ und $k_s \rightarrow \infty$. Im Grenzfall infinitesimaler Elemente würde die Bewehrung keine Rißöffnung gestatten. Dies ist unmöglich. Der beschriebene, irrealer Sachverhalt gilt sowohl für das Energiekriterium wie auch für das Festigkeitskriterium. Die Berücksichtigung von Gleitverbund zwischen Bewehrung und umgebenden Beton ist daher eine notwendige Bedingung zur Erlangung eines "objektiven" im Sinne von netzinvarianten (von den üblichen Diskretisierungsfehlern abgesehen) Ergebnisses. Objektivität des Ergebnisses im erwähnten Sinne ließe sich nun nicht erreichen, wenn die Abschnitte der Bewehrungsstäbe, längs der Gleitverbund angenommen wird, mit der Topologie des FE-Netzes in Beziehung gesetzt würde. Der Abschnitt $2L_s$ eines Bewehrungsstabes, der mit Gleitverbund assoziiert wird (s. Abb. 4b), muß eine Eigenschaft des Verbundwerkstoffes Stahlbeton darstellen.

5. Der Einfluß des Schlupfes zwischen der Bewehrung und dem umgebenden Beton

Die Haftspannungen τ_b zwischen der Bewehrung und dem umgebenden Beton hängen von den an der Trennfläche wirkenden, lokalen Normalspannungen ab. Der Schlupf verursacht eine Dilatationsbeanspruchung des die Bewehrung umgebenden Betons. Weiters hängt τ_b vom Schlupf δ_b , d.h. von der relativen Tangentialverschiebung zwischen Bewehrung und umgebendem Beton ab. Die erwähnten Tatsachen verursachen eine ungleichförmige Verteilung von τ_b längs des Bewehrungselementes (s. Abb. 5).

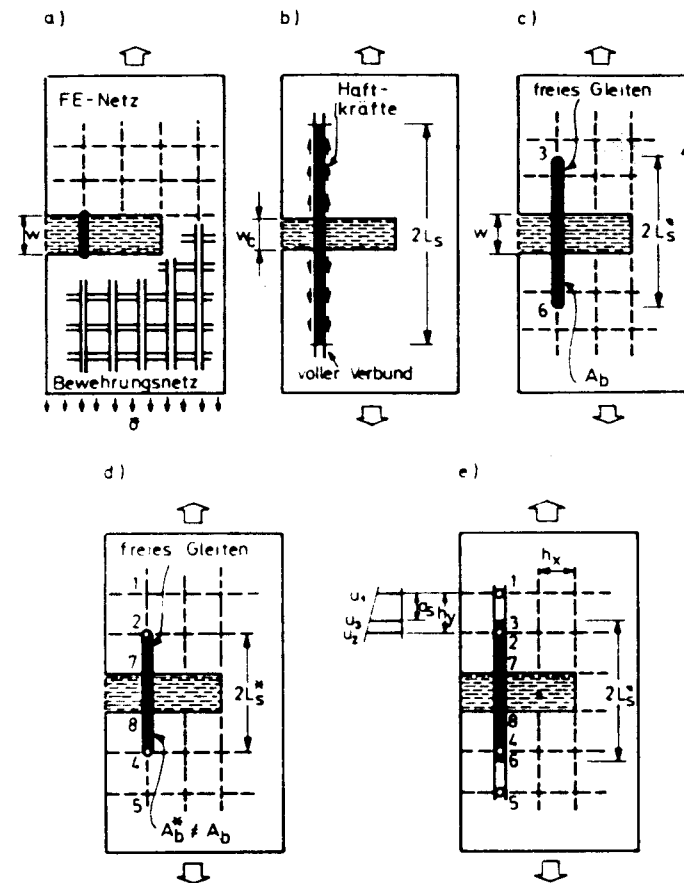


Abb. 4. Modell zur Berücksichtigung von Gleitverbund zwischen Bewehrung und umgebenden Beton im Bereich des Rißbandes

Zum Zweck der Ableitung einer vereinfachten Ingenieurformel sei angenommen, daß $\tau_h = \text{const.}$ Weiters nehmen wir an, daß die Haftkraft über eine Länge L_s gleich der beim Ausziehversuch (pull-out-test) (s. Abb. 5a-5f) ermittelten Haftkraft ist; L_s ist dann gleich der maximalen Einbettungslänge (s. Abb. 5), für welche der Bewehrungsstab bei einer Kraft P aus dem Beton herausgezogen werden kann. Standardwerte für profilierte Bewehrungsstäbe sind: $U'_h = P/L_s \geq 35\gamma f'_c$ für Bewehrungsabstände 15 cm und $U'_h = 28\gamma f'_c$ für Bewehrungsabstände $< 15 \text{ cm}$. f'_c kann in N/m^2 ($\gamma = 2.62$) oder in psi ($\gamma = 1$) eingesetzt werden ($1 \text{ psi} = 6.895 \text{ N/m}^2$).

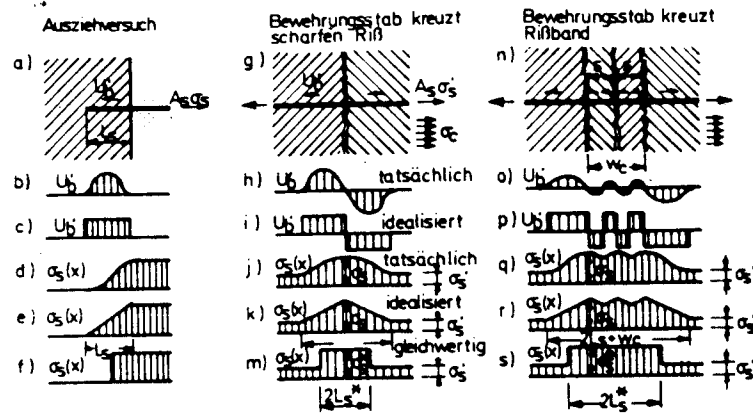


Abb. 5. Übersicht über die spezifischen Haftkräfte und -spannungen in einem Bewehrungsstab

Wir betrachten nun einen Bewehrungsstab, der einen scharfen RiB kreuzt (s. Abb. 5g-5m). Da die Stabkraft am RiB, $A_b \sigma_s$, im Gleichgewicht mit der Summe aus der Stabkraft $A_b \sigma'_s$ in einiger Entfernung vom RiB und der Haftkraft $U'_b L_s$ (s. Abb. 5i-5k) stehen muß, erhält man für die Schlupflänge L_s

$$L_s = (\sigma_s - \sigma'_s) A_b / U'_b \quad (17)$$

mit A_b als der Querschnittsfläche eines Bewehrungsstabes, $A_s = ph$ als der auf die Längeneinheit und die Scheibendicke bezogenen Stahlfläche und σ_s, σ'_s als den Zugspannungen im Bewehrungsstab am RiB bzw. am Ende des Schlupfsegmentes (s. Abb. 5k).

Im folgenden wird nur eine Familie von Bewehrungselementen berücksichtigt, welche die Bruchfläche kreuzt (s. Abb. 4, 5g). Am Ende des Schlupfsegmentes sind die Dehnungen im Beton und in der Bewehrung gleich, nämlich $\epsilon_s = \sigma'_s / E_s$, und die pro Bewehrungsstab übertragene Last $A_b \sigma_s$ ist ungefähr gleich der vom Beton und der Bewehrung gemeinsam übertragenen Kraft am Ende der Schlupfzone. Folglich gilt:

$$p \sigma_s = \sigma'_s / E_s \cdot (E_s p + E_c (1-p)) \quad (18)$$

oder

$$\sigma'_s = \sigma_s np / (1-p+np) \quad (19)$$

mit $n = E_s / E_c$ und $p = A_s / (A_c + A_s)$.

Damit ergibt sich $\sigma_s - \sigma'_s = \sigma_s (1-p) / (1-p+np)$ und dies ergibt die Schlupflänge (s. Abb. 4h, 5k)

$$L_s = (\sigma_s - \sigma'_s) A_b / U'_b = \sigma_s \frac{1-p}{1-p+np} A_b / U'_b \quad (20)$$

Eine obere Grenze für σ_s ist die Fließgrenze für Stahl. Eine ungefähre untere Grenze folgt aus der Annahme, daß die Zugkraft im Stahl, $\sigma_s A_s$, gleich der Zugkraft $A_c f'_t$ im Beton vor dem Reißen ist: $A_s = A_c p / (1-p)$. Dies führt auf $\sigma_s = f'_t (1-p) / p$. Die Verwendung von f'_t in dieser Schätzung stellt eine Abweichung von der bruchmechanischen Behandlung des Problems dar. Solange die anteilige Fläche des Betons pro Bewehrungsstab ungefähr von der Größe wie bei Proben für Zugversuche ist ($\sim 100 \text{ cm}^2$) (und das ist oft der Fall), dürfte näherungsweise f'_t anwendbar sein. Für die Berechnung wählt man einen Mittelwert aus den beiden erwähnten Grenzwerten.

Eine genauere Vorgangsweise besteht darin, die Zunahme von σ_s mit zunehmender Entfernung von der RiBfront zu berücksichtigen; dann wird L_s für jedes finite Element im Bruchband berechnet. In einiger Entfernung von der Bruchfront sind die berechneten Werte objektiv im Sinne der bereits mehrmals angeführten spezifischen Definition dieses Begriffes.

Die Schlupflänge ist den Abb. 5h-5k zusammen mit der aktuellen (s. Abb. 5h-5j) und der idealisierten (s. Abb. 5i-5k) Verteilung der Haftkraft U'_b und der Stahlspannung σ_s zu entnehmen. Die Berücksichtigung von Haftkräften in der FE-Analyse wäre - obwohl möglich - unpraktisch, da für Stahl und Beton separate Knoten betrachtet werden müßten. Eine praktikablere Methode besteht darin, nur die globale Verlängerung der Bewehrungselemente über die Schlupfzone $2L_s$ in Betracht zu ziehen. Anstelle von L_s betrachtet man eine gleichförmige Spannung σ_s über eine freie Schlupflänge $2L'_s$ (s. Abb. 4c) und eine gleichförmige

Spannung σ'_s über die verbleibende Strecke $(2L_s - 2L'_s)$, An den beiden Enden des Abschnittes $2L'_s$ wird starrer Verbund zwischen Bewehrung und umgebenden Beton vorausgesetzt. Anstelle von $2L'_s$ kann man alternativ eine geänderte freie Schlupflänge $2L''_s$ mit geändertem Bewehrungsquerschnitt A''_h berücksichtigen, derart, daß sich die Verlängerung bezogen auf den Abschnitt $2L_s$ nicht ändert.

Wir betrachten ein Bruchband der Breite w_c (s. Abb. 5n-5s), wobei s in Abb. 5n der mittlere Abstand paralleler Risse innerhalb des Bruchbandes ist. In diesem Fall erstreckt sich der Schlupfbereich zu beiden Seiten über eine Distanz L_s , und außerdem erfolgt Schlupf zwischen je zwei parallelen Rissen innerhalb des Bruchbandes selbst. Für $s < 2L_s$ fällt die Spannung im Bewehrungsstab in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen nicht auf σ'_s . Unter der Annahme von gleichem σ''_h (s. Abb. 5p) ergibt sich diese Spannung zu

$$\sigma_o = \sigma_s - (\sigma_s - \sigma'_s) s / (2L_s). \quad (21)$$

Die mittlere Spannung im Stahl innerhalb des Bruchbandes ergibt sich somit zu $\sigma_m = (\sigma_s + \sigma_o) / 2$. Die mittlere Spannung innerhalb der Abschnitte L_s ist $\sigma_n = (\sigma_s + \sigma'_s) / 2$.

Gleichgewicht am Ende der freien Schlupflänge $2L''_s$ erfordert, daß die gesamte Kraft im Segment der Länge $2L''_s$ und des Querschnittes A''_h gleich der für den realen Querschnitt A_h sein muß:

$$\sigma''_s A''_h = \sigma_s A_h \quad (22)$$

Daraus folgt: $\sigma''_s = \sigma_s A_h / A''_h$ innerhalb $2L''_s$.

Aus dem Vergleich der Verlängerungen (Verlängerung über die freie Schlupflänge $2L''_s$ für eine angenommene Querschnittsfläche A''_h plus der Verlängerung über die verbleibende Länge $2L_s + w_c - 2L''_s$ ohne Schlupf = Verlängerung über die tatsächliche Schlupflänge $2L_s + w_c$ für den tatsächlichen Bewehrungsgrad p) erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{2L''_s}{E_s} \sigma''_s \frac{A_h}{A''_h} + (2L_s + w_c - 2L''_s) \frac{\sigma'_s}{E_s} &= \\ &= 2L_s \frac{\sigma_s + \sigma'_s}{2E_s} + \frac{w_c}{E_c} (\sigma_c - s \frac{\sigma_s - \sigma'_s}{4L_s}) \end{aligned} \quad (23)$$

und mit Glg. (19) ergibt sich für die äquivalente freie Schlupflänge (d.h. für die äquivalente Länge, die die gleiche Steifigkeit des Bewehrungsstabes liefert)

$$L''_s = \frac{A''_h (1-p)}{2[A_h (1-p+np) - pn A''_h]} [L_s + w_c (1-s/(4L_s))] . \quad (24)$$

Für $A''_h = A_h$ folgt aus Glg. (24)

$$L'_s = \frac{1}{2} [L_s + w_c (1-s/(4L_s))] . \quad (25)$$

Für einen scharfen Riß ($w_c=0$) vereinfacht sich diese Beziehung zu (s. Abb. 5m)

$$L'_s = L_s / 2 . \quad (26)$$

Verbundschlupf sollte für alle das Rißband kreuzenden Bewehrungsstäbe berücksichtigt werden einschließlich derjenigen Stäbe, die entweder ΔV kreuzen oder auf ΔS liegen. Abhängig von den in den Knotenpunkten erhaltenen Haftkräften, sollte Verbundschlupf auch für vor dem Bruchband innerhalb eines bestimmten Abstandes vor der Bruchfront gelegene Elemente berücksichtigt werden. Eine Verallgemeinerung auf Bewehrungsstäbe, die das Rißband schräg durchsetzen, ist möglich.

Der numerische Berechnungsgang läuft wie folgt ab:

- Berechnung von $2L'_s$ aus Glg. (25) für $A''_h = A_h$ (Distanz $\overline{36}$ in Abb. 4c)
- Abrundung, sodaß $2L'_s \hat{=}$ Distanz der nächstliegenden Knoten ($\overline{24}$ in Abb. 4d) und Berechnung von A''_h aus Glg. (24);
- Im FE-Programm ist zu beachten, daß Bewehrungsstäbe

$$f_{eq} = c \left(G_{cr} E_c / w \right)^{1/2}$$

unrichtige Resultate liefert.

(28)

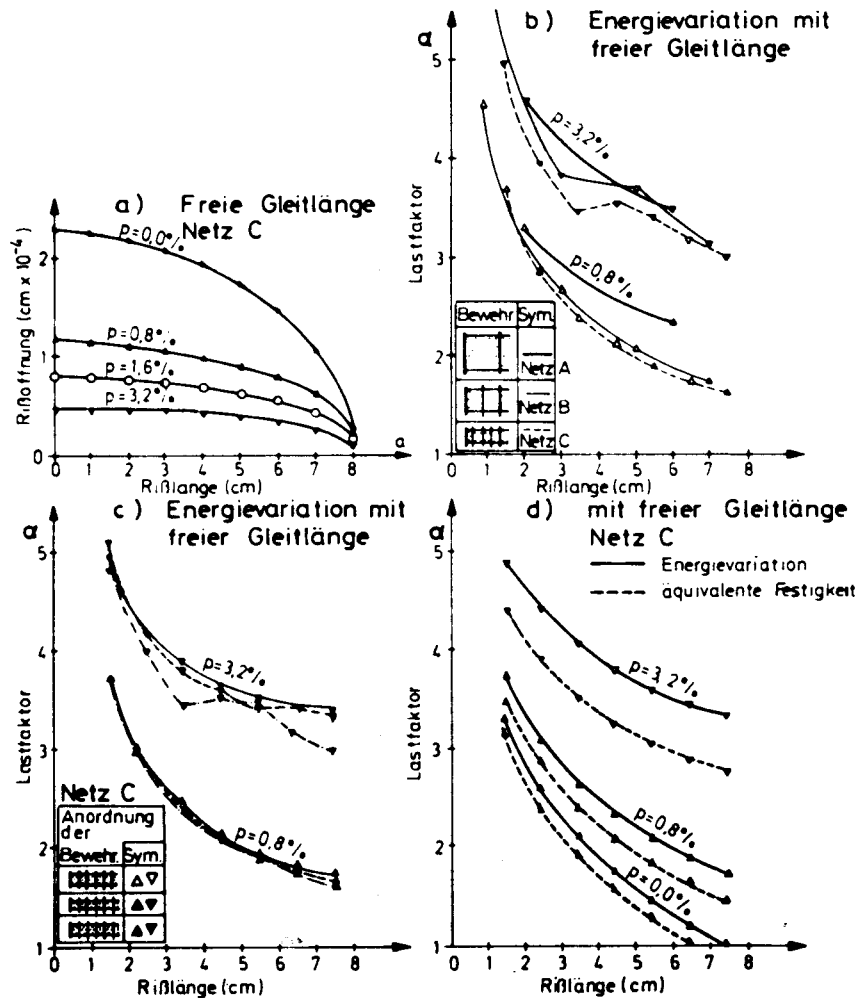


Abb. 6. a) Rißöffnungsprofile
 b) Ergebnisse für verschiedene Netzgrößen
 c) Ergebnisse für verschiedene Bewehrungsabstände
 d) Ergebnisse für Kriterium der äquivalenten Zugfestigkeit

6.1. Einfluß der Bruchflächenrauigkeit

Aufgrund der Verzahnung des Zuschlagstoffes können Risse im Stahlbeton beträchtliche Schubkräfte übertragen. Aus der Kontaktmechanik ist bekannt, daß der Schlupf zweier rauher Oberflächen in Kontakt stets von einem Zuwachs der Rißaufweitung begleitet ist. Falls letztere behindert wird, werden an den Bruchflächen große Druckspannungen induziert. Diesen sekundären Druckspannungen müssen zusätzliche Zugkräfte in der Bewehrung das Gleichgewicht halten. Dies führt zur Aussage, daß die Berücksichtigung der Bruchflächenreibung beim Entwurf des Bauteils in der Regel eine stärkere Bewehrung bedingt. Bei Vernachlässigung der Bruchflächenreibung liegt man somit bei der Bemessung des Bauwerkes bzw. Konstruktionsteiles im allgemeinen auf der unsicheren Seite.

Die ersten FE-Untersuchungen unter Berücksichtigung der Bruchflächenreibung gehen auf Suidan und Schnobrich zurück, welche den Schubmodul G durch einen reduzierten Modul $G' = \alpha_s G$ ($0 \leq \alpha_s \leq 1$) ersetzen. Dieses vereinfachte Modell kommt jedoch der Wirklichkeit überhaupt nicht nahe, da der für die Existenz der Schubspannungen wichtige Normaldruck fehlt. Neuere experimentelle Untersuchungen zeigten überdies, daß die Schubübertragung ein hochgradig nichtlineares Problem ist.

6.2. Spannungs-Verschiebungs-Gesetz

Wir betrachten eine ebene, aber mikroskopisch rauhe Bruchfläche nach Abb. 7, worin δ_n und δ_t die relativen Normal- und Tangentialverschiebungen der Rißflächen betreffen.

Es sei δ_n die Rißöffnung ($\delta_n > 0$) und δ_t der Rißschlupf. Die zugehörigen Spannungen sind die Normalspannung σ_{nn}^c (< 0 für Druck) und die Schubspannung σ_{nt}^c , wobei der Index "c" auf Beton hinweist.

Im Sinne von Mittelungen über große Gebiete der Bruchfläche und viele Risse können die Relationen zwischen Differentialen von σ_{nn}^c , σ_{nt}^c und δ_n , δ_t ähnlich wie in der inkrementellen

$$\sigma_{nn}^C = f_n(\delta_n, \delta_t) \quad \sigma_{nt}^C = f_t(\delta_n, \delta_t) \quad (30)$$

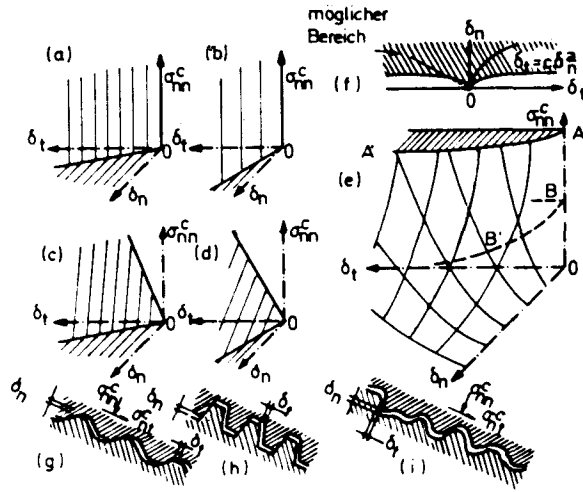


Abb. 7. Spannungs-Verschiebungs-Flächen (a) - (f) und Reißmorphologie (g) - (i)

Plastizitätstheorie als Materialeigenschaft angesehen werden. Die erwähnten Beziehungen können formal wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{cases} d\sigma_{nn}^C \\ d\sigma_{nt}^C \end{cases} = \begin{bmatrix} B_{nn} & B_{nt} \\ B_{tn} & B_{tt} \end{bmatrix} \begin{cases} d\delta_n \\ d\delta_t \end{cases}$$

hzw.

$$\begin{cases} d\delta_n \\ d\delta_t \end{cases} = \begin{bmatrix} F_{nn} & F_{nt} \\ F_{tn} & F_{tt} \end{bmatrix} \begin{cases} d\sigma_{nn}^C \\ d\sigma_{nt}^C \end{cases} \quad (29)$$

mit B_{nn} , B_{nt} , B_{tn} und B_{tt} als Koeffizienten einer Steifigkeitsmatrix und F_{nn} , F_{nt} , F_{tn} und F_{tt} als Koeffizienten einer Nachgiebigkeitsmatrix. Eine einfachere aber weniger allgemeine Form der Spannungs-Dehnungsbeziehungen ist durch die Relationen

gegeben, welche ihre Gegenstücke in der Deformationstheorie der Plastizität (Theorie der totalen Verzerrungen) haben. Ein wesentlicher Nachteil der Glg. (30) liegt in der Unabhängigkeit des Ergebnisses vom Belastungsweg in der δ_n , δ_t -Ebene begründet. Aus physikalischen Überlegungen der Kontaktmechanik folgt, daß $B_{nn} < 0$ und $B_{tn} < 0$ für $\delta_t > 0$ und $B_{nt} > 0$ und $B_{tt} > 0$ für $\delta_n > 0$ ist. Dies führt auf eine Steifigkeitsmatrix, die nicht positiv definit ist und folglich eine Tendenz zu Reißinstabilität zeigt.

Aufgrund von Versuchsergebnissen von Paulay und Loeber erhält man Spannungs-Verschiebungsgesetze der Form

$$\sigma_{nn}^C = -\frac{a_1}{\delta_n} (a_2 |\sigma_{nt}^C|)^p \quad \sigma_{nt}^C = \tau_u r \frac{a_3 + a_4 |r|^3}{1 + a_4 r^4} \quad (31)$$

mit

$$r = \delta_t / \delta_n, \quad \tau_u = \tau_0 \frac{a_0}{a_0 + \delta_n^2}, \quad p = g(\delta_n), \quad \tau_0 = 0.245 f_c' \quad (32)$$

und a_1, \dots, a_4 als Ausgleichungsparametern, die von der Größe der Zuschlagstoffe abhängen.

Für $\delta_t \gg \delta_n$ (großer Schlupf) ergibt sich aus Glg. (31) $\sigma_{nt}^C = \tau_u$. τ_u stellt die maximale Schubspannung dar. Sie ergibt sich als Asymptote der Kurve $\sigma_{nt}^C - \delta_t$ bei konstantem δ_n ; τ_0 ist der Grenzwert für $\delta_n \rightarrow 0$; f_c' ist die Zylinderfestigkeit nach 28 Tagen. Testdaten sowie auf ihnen beruhende Materialgesetze in analytischer Form scheinen in den Abb. 8 und 9 auf.

In der Nähe des Ursprungs $\delta_n = \delta_t = 0$ gilt:

$$\delta_t = c \delta_n^a \quad (33)$$

mit a und c als Konstanten.

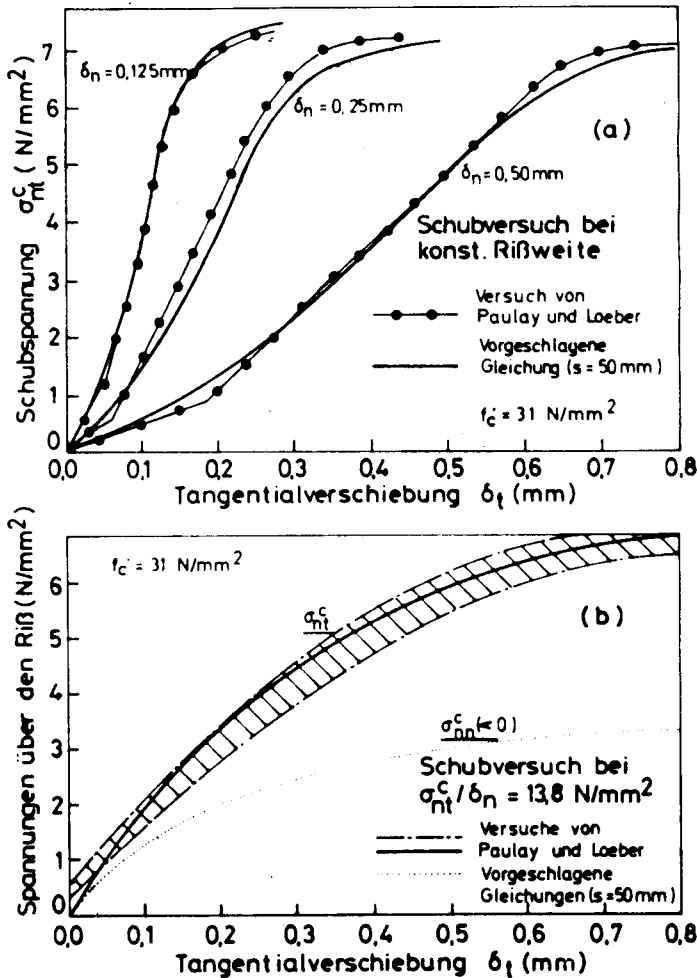


Abb. 8. Anpassung an Versuchsergebnisse von Paulay und Loeber

Dies führt auf

$$d\delta_t/d\delta_n = 0 \text{ für } \delta_n = 0 \tag{34}$$

und besagt, daß sich die Rißufer zuerst abheben müssen bevor Schlupf eintreten kann. Dies muß in der FE-Rechnung berücksichtigt werden.

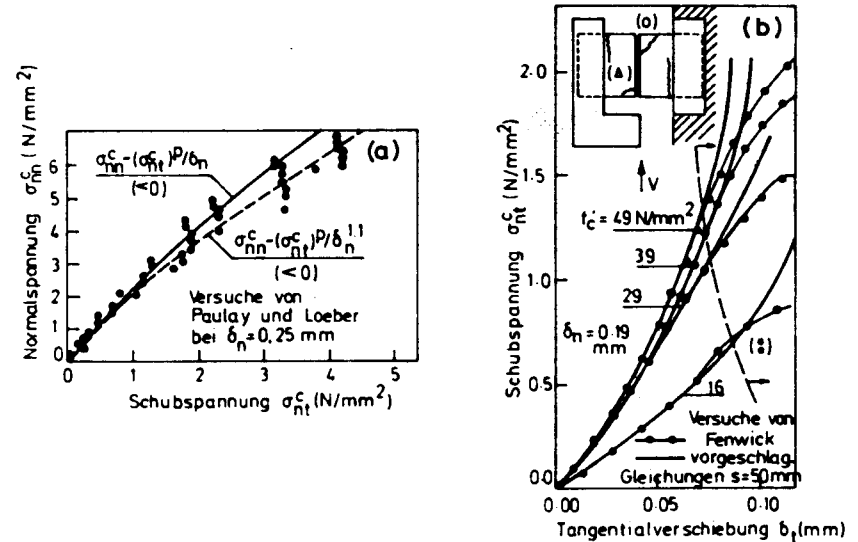


Abb. 9. Anpassung an Versuchsergebnisse von (a) Paulay und Loeber und (b) Fenwick
(8) Versagen zufolge Bildung vorzeitiger Biegerisse (Delta) Diagonallrisse (o)

Für geringen Schlupf ($\delta_n \gg \delta_t$) ergeben sich δ_n und δ_t zu /2/:

$$\delta_n = \frac{A_1}{(-\sigma_{nn}^c)} \left| \frac{\sigma_{nt}^c}{A_2} \right|^p ; \quad \delta_t = A_1 \cdot A_2^{-(p+1)} \frac{\sigma_{nt}^c}{(-\sigma_{nn}^c)} \left| \sigma_{nt}^c \right|^p \tag{35}$$

Man erhält also für $\delta_n = \text{konst.}$ eine lineare Beziehung zwischen σ_{nt}^c und δ_t/δ_n zu Beginn des Schubtests. Dies ist aus Abb. 10 (a) ersichtlich. Weitere auf den Glg. (31) und (32) beruhende, typische Verhaltensdiagramme für gerissenen Beton zeigen die Abb. 10 (b) und (c).

6.3. Stahlbeton mit schräg zur Bewehrung verlaufenden Rissen

Abb. 11 stellt eine mit einem orthogonalen Netz bewehrte Stahlbetonscheibe mit schräg zur Bewehrung verlaufenden Rissen dar.

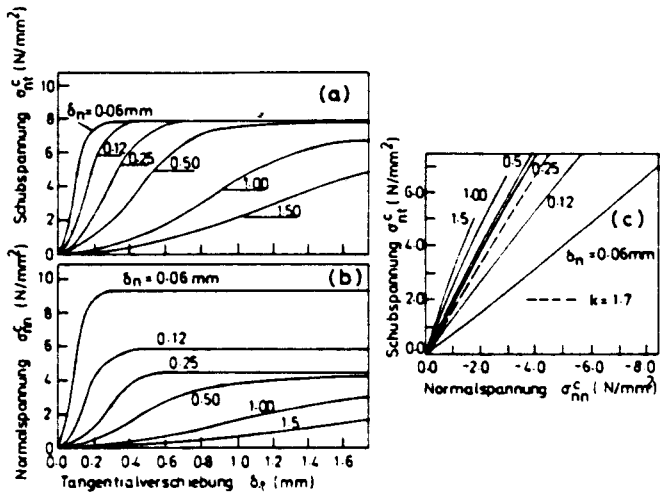


Abb. 10. Typische Verhaltendiagramme für gerissenen Beton (Zylinderfestigkeit $f'_c = 31 \text{ N/mm}^2$; Rißabstand $s = 50$ mm)

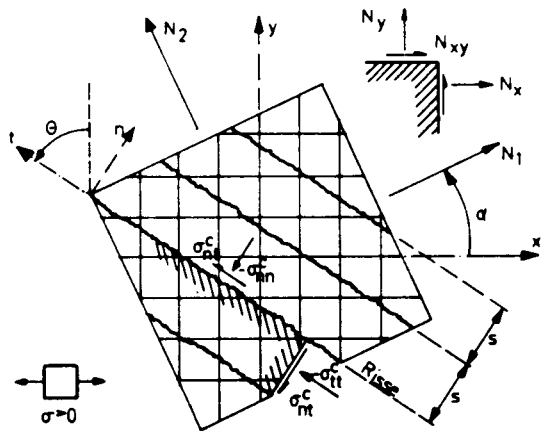


Abb. 11. Gerissene Stahlbetonscheibe

Im gerissenen Beton (Abb. 11) werden die Deformationen zufolge der Risse als kontinuierlich verteilt oder "verschmiert" angesehen. Die gemittelten Verzerrungen zufolge der "verschmierten" Risse sind:

$$\epsilon_{nn}^{cr} = \delta_n/s, \quad \gamma_{nt}^{cr} = 2 \epsilon_{nt}^{cr} = \delta_t/s \quad (36)$$

mit s als mittlerem Rißabstand. Damit gilt unter Berücksichtigung von Glg. (29)

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_{nn}^{cr} \\ d\epsilon_{tt}^{cr} \\ d\epsilon_{nt}^{cr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{nn}s^{-1} & 0 & F_{nt}s^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ F_{tn}s^{-1} & 0 & F_{tt}s^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_{nn}^c \\ d\sigma_{tt}^c \\ d\sigma_{nt}^c \end{Bmatrix} \quad (37)$$

oder in abgekürzter Form

$$d\epsilon^{cr} = D^{cr} d\sigma^{cr}, \quad (38)$$

wobei sich der Index "cr" auf "crack" (Riß) bezieht.

Die gemittelten Verzerrungen $\epsilon_{nn}^c, \epsilon_{tt}^c$ und γ_{nt}^c der Stahlbetonscheibe in Rißrichtung sind gleich der Summe aus den Verzerrungen des ungerissenen Betons zwischen den Rissen $\epsilon_{nn}^{sc}, \epsilon_{tt}^{sc}, \epsilon_{nt}^{sc}$ wobei sich der Index "sc" auf "solid concrete" (fester, ungerissener Beton) bezieht, und den Verzerrungen zufolge der Risse $\epsilon_{nn}^{cr}, \epsilon_{tt}^{cr}$ und ϵ_{nt}^{cr} . Für ein Differential $d\epsilon$ gilt somit

$$d\epsilon = d\epsilon^{sc} + d\epsilon^{cr}. \quad (39)$$

Das Differential $d\epsilon^{sc}$ läßt sich durch das Differential $d\sigma^c$ mit Hilfe von

$$d\epsilon^{sc} = D^{sc} d\sigma^c \quad (40)$$

darstellen, wobei D^{sc} die Tangentennachgiebigkeitsmatrix des ungerissenen Betons darstellt. D^{sc} hängt im allgemeinen von σ^c und ϵ^c ab.

Für kleine Spannungen im ungerissenen Beton gilt näherungsweise:

$$D^{SC} \approx \begin{bmatrix} E^{-1} & -\nu E^{-1} & 0 \\ -\nu E^{-1} & E^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & G^{-1} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Falls dieser linear-elastische Ansatz nicht entspricht, die Verzerrungen nichtsdestoweniger aber relativ klein sind, läßt sich D^{SC} aus einer passenden totalen Spannungs-Dehnungs-Kurve für Beton durch Differentiation gewinnen.

Substitution der Glg. (40) und (38) in Glg. (39) ergibt

$$d\varepsilon = D^C d\sigma^C ; \quad D^C = D^{SC} + D^{CR} \quad (42)$$

mit D^C als der Tangentennachgiebigkeitsmatrix des rissebehafteten Betons.

Im folgenden wird der Einfluß der Bewehrung berücksichtigt. Dabei wird angenommen, daß die gemittelten Verzerrungen der Bewehrung dieselben wie für den rissebehafteten Beton sind. Diese Annahme impliziert lokalen Verbundschlupf in der Nähe der Risse, weil die Verzerrungen der Bewehrungselemente als von den Verzerrungen im festen, ungerissenen Beton verschieden angenommen werden.

Die gemittelten Spannungen in der Bewehrung sind

$$d\sigma^S = C^S d\varepsilon , \quad (43)$$

wobei der Index "s" für "Stahl" steht. Da die Risse i.a. schräg zur Bewehrung verlaufen, erhält man die Matrix C^S , die die Verzerrungsdifferentiale in der Bewehrung mit Spannungsdifferentiale in Richtung der Rißkoordinaten n und t verknüpft, durch Summation von Steifigkeiten in den einzelnen Bewehrungsrichtungen:

$$C^S = \sum_{i=1}^N B_i C_i^S B_i^T . \quad (44)$$

In Glg. (44) sind

$$B_i = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & 2CS \\ -CS & CS & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \quad C_i^S = \begin{bmatrix} p_i E_s(\varepsilon_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

mit $C = \cos\theta_i$, $S = \sin\theta_i$, wobei θ_i den Winkel zwischen dem i-ten System paralleler Bewehrungsstäbe und der Rißnormalen und p_i den entsprechenden Bewehrungsgrad darstellt. Für ein orthogonales Netz (s. Abb. 11) ist in den Glg. (44) und (45) $N=2$, $\theta_1 = \theta$ und $\theta_2 = \theta - \pi/2$ zu setzen. $E_s(\varepsilon)$ ist der einaxiale Tangentensmodul der Bewehrung. Er hängt von der Verzerrung ab.

Die Differentiale der Spannungen im gerissenen Stahlbeton ergeben sich zu

$$d\sigma = d\sigma^C + d\sigma^S . \quad (46)$$

Aus Glg. (42) folgt $d\sigma^C = (D^C)^{-1} d\varepsilon^C$. Somit ergibt sich

$$d\sigma = C d\varepsilon , \quad C = C^S + (D^C)^{-1} \quad (47)$$

wobei C die Tangentensteifigkeitsmatrix des gerissenen, bewehrten Betons bezogen auf die Rißkoordinaten n und t ist.

6.4. Numerische Berechnungen

Die entwickelte Theorie gestattet es, das Verhalten gerissener, bewehrter Betontragwerke bei monoton ansteigenden Spannungen oder Verzerrungen zu berechnen. Für jede Tensorkomponente kann für das betreffende Lastinkrement entweder das Spannungs- oder das Verzerrungsinkrement vorgeschrieben werden. Aus Glg. (47) erhält man dann entweder Komponenten von $\Delta\varepsilon$ oder $\Delta\sigma$.

Zur rechnerischen Bewältigung der Singularität bei $\delta_n = \delta_t = 0$ ist es notwendig, während des ersten Belastungsschrittes $B_{nn} = 0$, B_{tt} gleich einer sehr großen Zahl (z.B. 10^{40}) und $B_{nt} = B_{tn}$ gleich einer sehr kleinen Zahl (z.B. 10^{-40}) zu setzen, um $\Delta\delta_t = \Delta\gamma_{nt} = 0$ für $\delta_n > 0$ beim ersten Schritt zu erhalten. Für genau tangentielle Last erhält man nicht nur $\Delta\delta_t = 0$, sondern auch $\Delta\delta_n = 0$; in diesem Falle muß man $\Delta\delta_n$ einen von Null verschiedenen (~ 0.001 mm) Startwert zuordnen. Den Startwert für

$$\Delta\sigma_{nt} / \Delta\sigma_{nn} = \sigma_{nt} / \sigma_{nn} = (1-m) \sin^2(\alpha-\theta) / A \quad (48)$$

$$\Delta\sigma_{tt} / \Delta\sigma_{nn} = \sigma_{tt} / \sigma_{nn} = [(1+m) - (1-m) \cos 2(\alpha-\theta)] / A$$

mit

$$A = 2 \Delta\sigma_{nn} / \Delta N_1 = (1+m) + (1-m) \cos 2(\alpha-\theta) \quad (49)$$

gekennzeichnet.

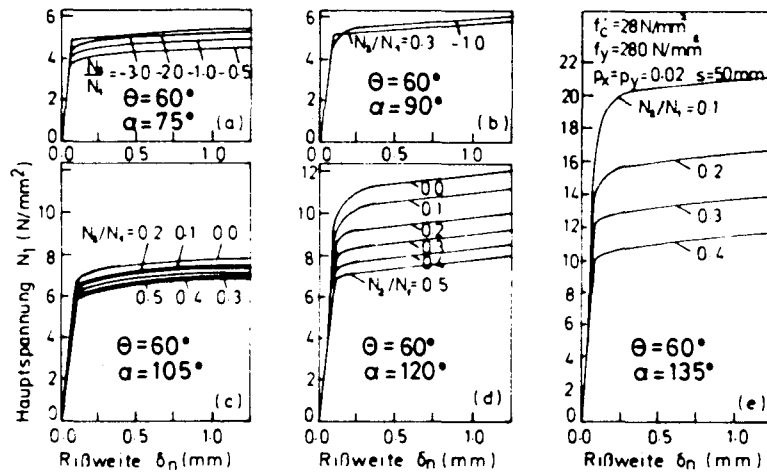


Abb. 13. Hauptspannung N_1 versus Rißweite für verschiedene Hauptspannungsverhältnisse und Neigungen der Hauptrichtungen gegenüber der Bewehrung

Die Ergebnisse zeigen, daß der Einfluß der Schräglage der Bewehrungsstäbe relativ zu den Rissen ein sehr ausgeprägter ist.

Für den Entwurf von Bauteilen sind beliebige Rißrichtungen in Rechnung zu stellen. Die Risse können von Vorbelastungen, Schwinden oder Temperaturspannungen herrühren. Die ungünstigste Rißrichtung sollte beim Entwurf berücksichtigt werden. Durch Variationen von m und θ (s. Abb. 14a) läßt sich für jede Neigung α die Minimallast ausrechnen, die einen Riß mit der Öffnung δ_n verursacht. Die Einhüllenden dieser Minimalwerte für N_1 für verschiedene Rißweiten δ_n sind in Abb. 14b zusammen mit den kritischen Werten θ' von θ für minimales N_1 dargestellt.

Gleichzeitig repräsentieren diese Linien die sich zufolge N_1 einstellende maximale Rißöffnung δ_n . Für kleine Rißöffnungen ($\delta_n = 0.05 - 0.1 mm$) ist die ungünstigste Rißorientierung $\theta' = \alpha$, also der Riß normal zu N_1 , während für größere Rißöffnungen ($\delta_n = 0.25 - 0.5 mm$) der Winkel θ' zwischen die Richtung von N_1 und die Bewehrungsrichtung x fällt. Für sehr große δ_n hat das Verhältnis $m = N_2/N_1$ keinen Einfluß auf die Minimallast N_1 . Bei Vernachlässigung der Bruchoberflächenreibung ist die ungünstigste Rißorientierung normal zu N_1 .

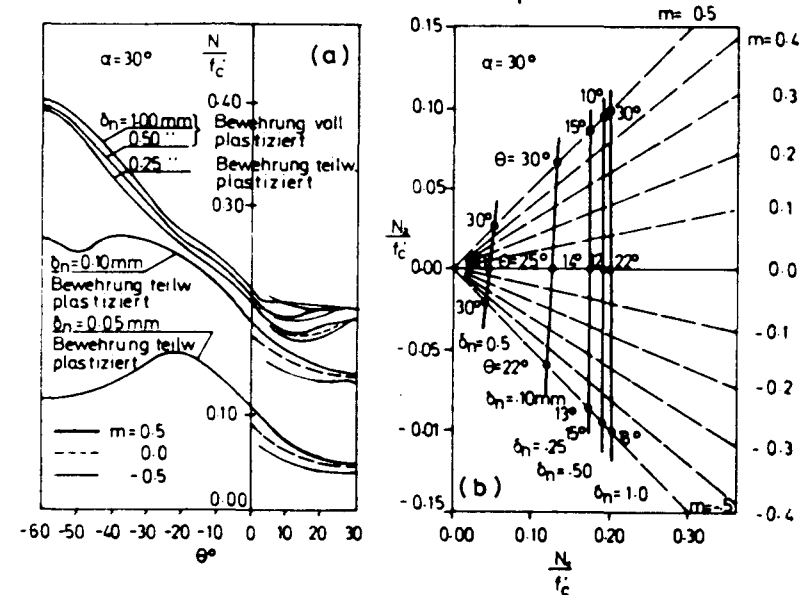


Abb. 14. Typische Entwurfsdiagramme für die Rißweite: (a) Hauptzugspannung N_1 versus Rißneigung θ für verschiedene Rißweiten und Hauptspannungsverhältnisse; (b) $N_2 - N_1$, Einhüllende maximaler Rißöffnung (Beton: $f'_c = 28 N/mm^2$; Stahl: $f_y = 280 N/mm^2$; $p_x = p_y = 0.02$; Rißabstand $s = 50 mm$)

Abb. 15 zeigt den Einfluß des Rißabstandes.

Kleiner Rißabstand ergibt kleinere Rißweiten und damit ein steiferes Verhalten der Struktur. Der Rißabstand beeinflußt zwar die maximale Normalspannung (s. Abb. 15b), nicht aber die maximale Schubspannung (s. Abb. 15a).

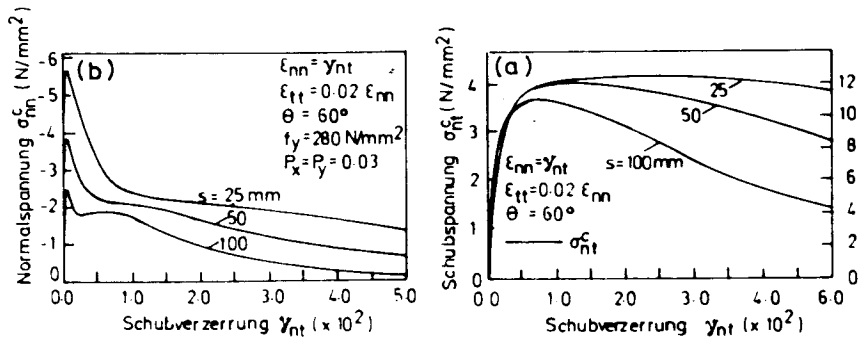


Abb. 15. Rechnerisch ermittelte Spannungs-Dehnungs-Diagramme für gerissenen, bewehrten Beton für verschiedene Rißabstände ($f'_c = 28 \text{ N/mm}^2$)

7. Verallgemeinerungen

Die vorangegangenen Betrachtungen lassen sich auf zwei oder mehrere Rißsysteme mit beliebiger Orientierung verallgemeinern. Die abgeleiteten Spannungs-Verschiebungsgesetze lassen interessante Schlußfolgerungen für die Richtung der Rißausbreitung oder Bruchwegstabilität zu. In der unmittelbaren Umgebung der Rißspitze ist die Rißöffnung klein. Die relative Verschiebung der beiden Rißufer erfolgt normal zur Bruchfläche (s. Glg. (34)). Da diese Beziehung für eine beliebig kleine Umgebung der Rißspitze gültig ist, kann ein Mode-2 Anteil am Verschiebungsfeld nicht existieren, d.h. der Riß breitet sich nach dem Gesetz $K_2 = 0$ aus. Dieses Bruchkriterium ist in der kontinuumstheoretischen Bruchmechanik wohlbekannt. Es wurde auch im Rahmen von FE-Analysen verwendet.

8. Zusammenfassung

Zusammenfassend läßt sich sagen:

a) Die gegenwärtigen Bruchbandmethoden, die auf dem Festigkeitskriterium basieren, sind "unobjektiv", d.h. sie hängen über das herkömmliche Maß (konventionelle Diskretisierungsfehler) von der Netzeinteilung ab und konvergieren zu falschen Lösungen.

- b) Der Wert der Dissipationsenergie ist ein objektives, physikalisch sinnvolles Kriterium für die Bruchbandausbreitung.
- c) Das erwähnte Kriterium ist nur dann objektiv, wenn der Schlupf zwischen den Bewehrungsstäben und dem umgebenden Beton berücksichtigt wird.
- d) Die Schlupflänge L_s der das Bruchband kreuzenden Bewehrungselemente ist ein charakteristischer Parameter des Verbundwerkstoffes Stahlbeton. L_s ist von der FE-Diskretisierung unabhängig.
- e) Es ist vom praktischen Standpunkt aus gesehen zweckmäßig anstatt L_s eine sogenannte freie Schlupflänge L'_s zu betrachten, längs der keine Haftkräfte wirkend angenommen werden. L'_s ist so zu bestimmen, daß sich für das Haftschlupfelement die ursprüngliche Deformation ergibt.
- f) Die Grundlagen der Bruchmechanik dürfen auch auf den bewehrten Beton angewendet werden.
- g) Das Bewehrungsverhältnis p hat einen starken Einfluß auf die Rißausbreitung.
- h) Die Bewehrungselemente wirken bei geeigneter Maschenweite als Rißarrester.
- i) Rißschlupf bei konstanter Rißöffnung induziert Drucknormalspannungen über die Bruchfläche.
- j) Rißschlupf bei konstanter Normalspannung verursacht Dilation des Risses.
- k) Die Spannungs-Verschiebungs-Beziehungen für gerissenen Beton können nicht durch Federelemente beschrieben werden, da die inkrementelle Rißsteifigkeitsmatrix nicht positiv definit ist.
- l) Die inkrementelle Steifigkeitsmatrix für den gerissenen Beton ist nichtsymmetrisch. Sie führt auf Abweichungen von der Parallelität der Hauptachsenrichtungen von Spannungs- und Verzerrungsincrementen. Die Ursache für diesen Sachverhalt besteht in der Koppelung von Schub- und Normalspannungskomponenten.
- m) Das Strukturverhalten gerissenen, bewehrten Betons in Abhängigkeit von der Belastungsgeschichte ist durch einen

starken Einfluß des Abstandes benachbarter Risse gekennzeichnet.

- n) Bei gegebenen Rißabständen können Rißweiten als Funktion der Belastung bestimmt werden. Dies erlaubt die Bemessung für maximale Rißweiten.
- o) Rißausbreitung erfolgt ausschließlich im Mode-I, d.h. $K_2=0$.
- p) Die beschriebene Theorie ist für FE-Programme geeignet, die auf inkrementeller Lastaufbringung beruhen.

9. Literatur

1. Bažant Z.P. und L. Cedolin, Fracture mechanics of reinforced concrete. J.Eng.Mech.Div. ASCE, Vol. 106, No.EM6, Dez. 1980, pp. 1287-1306.
2. Bažant Z.P. und P. Gambarova, Rough cracks in reinforced concrete. J.Struct.Div. ASCE, Vol.106, No. ST4, April 1980, pp. 819-842.

Prof.Dr.-Ing.habil. Zdeněk P. Bažant
 Director of Center for Geomaterials and Concrete
 Northwestern University
 Evanston, Illinois 60201, USA

Prof.Dr.-Ing. Luigi Cedolin
 Prof.Dr.-Ing. Pietro Gambarova
 Department of Structural Engineering
 Politecnico di Milano
 Milano, Italia

Doz.Dr.phil. Hans-Peter Rossmanith
 Institut für Mechanik

Prof.Dr.-techn. Herbert A. Mang
 Institut für Baustatik und Festigkeitslehre
 Technische Universität Wien
 Karlsplatz 13
 A-1040 Wien, Österreich

mit dem Querschnitt A_h^* diese beiden Knoten direkt verbinden (Knoten 2 und 4 in Abb. 4d). Falls weitere Knoten zwischen diesen beiden Knoten vorhanden sind (Knoten 7 und 8 in Abb. 4d), so sind diese Knoten als nicht mit der Bewehrung verbunden zu betrachten. Die Bewehrungsstäbe, die alle anderen Knoten verbinden (z.B. $\overline{12}$, $\overline{45}$, ... in Abb. 4d), weisen natürlich den Querschnitt A_h und nicht A_h^* auf.

d) Abschätzung der Stahlspannung am RiB mit Hilfe von L'_s und den relativen Verschiebungen v_1 und v_2 der Bewehrungsstäbe an beiden Enden von L'_s aus dem vorangegangenen Lastschritt.

$$\sigma_s \approx E_s (v_2 - v_1) / L'_s \quad (27)$$

Für die Bewehrungsstäbe direkt hinter der Bruchfront kann man im Sinne einer oberen Schranke die Abschätzung

$$v_2 - v_1 = 8 \left[G_{CR} l / (2\pi E_c') \right]^{1/2} \quad (28)$$

für die RiBöffnung in einer Entfernung l hinter der Bruchfront verwenden. (Diese Abschätzung beruht auf der RiBöffnung eines mathematisch scharfen Risses unter der Wirkung von Normalzugspannungen).

6. Ergebnisse aufgrund "objektiver" (im Sinne von netzinvarianter) Bruchanalyse einer Stahlbetonscheibe

Die bereits früher betrachtete, bewehrte Scheibe wurde unter Berücksichtigung des Verbundschlupfes neu durchgerechnet. Anstelle von U_b' und $2L_s$ wurde der Wert $2L'_s = 4 \text{ cm}$ (aus welchem U_b' berechnet werden kann) für alle Netze vorgegeben. Die resultierenden kritischen Lastparameter α für Bruchbandvorschritt sind für verschiedene RiBlängen a für alle drei Netze in den Abb. 2c und 2d für verschiedene Bewehrungsparameter p wiedergegeben. Die Verbesserung der Ergebnisse ist einsichtig. Die Objektivität der Methode ist bis auf die bei der FEM üblichen Diskretisierungsfehler gegeben.

Die Abb. 2c und 2d zeigen, daß der Einfluß des Bewehrungsverhältnisses p auf die Last, die den RiBvorschritt bewirkt, he-

achtlich ist. Die RiBöffnungsprofile bzw. Bruchbandöffnungsprofile sind in Abb. 6a dargestellt. Dabei handelt es sich um die gegenseitige Verschiebung gegenüberliegender Ufer des Bruchbandes. Man erkennt, daß das Bruchbandöffnungsprofil für $p=0$ (unbewehrter Beton) fast elliptisch ist (bruchmechanische Lösung für metallische Werkstoffe) und mit größer werdendem p flacher wird.

Diese Ergebnisse gelten für Bewehrungsnetze, bei denen die Bewehrungsstäbe mindestens so eng wie die Knoten des feinsten Netzes liegen, sodaß an jedem Knoten ein Bewehrungsstab berücksichtigt werden muß. Wenn das Bewehrungsnetz größer ist und z.B. mit dem größten FE-Netz zusammenfällt, dann werden die Stabelemente in den FE-Netzen B und A nur an jedem zweiten oder vierten Knoten berücksichtigt. Die Ergebnisse für diese Fälle sind in Abb. 6b gezeigt.

Die Ergebnisse für verschiedene Bewehrungsnetze für das FE-Netz C sind in Abb. 6c dargestellt. Man beobachtet, daß die Schaubilder a-a für ein grobes Bewehrungsnetz Oszillationen aufweisen. Dies bewirkt, daß man für bestimmte RiBlängen a bei $G = G_{CR}$ $\partial\alpha/\partial a > 0$ erhält, was bedeutet, daß bei Kontrolle der Belastung der RiB stabil wird. Demgegenüber ist der RiB im Falle von Lastkontrolle instabil, wenn $\partial\alpha/\partial a < 0$ bei $G = G_{CR}$. Im Falle von Kontrolle der Randverschiebungen ist für $\partial\alpha/\partial a < 0$ bei $G = G_{CR}$ der RiB stabil.

Das grobe Bewehrungsnetz ist also zum RiBarrest befähigt. RiBarrest unter Lastkontrolle tritt im Falle des vorliegenden Beispiels nur dann auf, wenn der Bewehrungsabstand wenigstens die vierfache Elementgröße aufweist. Da diese wiederum nicht kleiner als die zweifache Größe des Zuschlagstoffes sein kann, wenn die FEM sinnvoll anwendbar sein soll, muß der Bewehrungsabstand größer als der achtfache Aggregatdurchmesser sein. Je größer also das Bewehrungsnetz ist, desto größer ist die Arrestwirkung der Bewehrung. Andererseits weisen enge Bewehrungsgitter wohlbekannte Vorteile wie Duktilität, Haftung, RiBweite, Energieabsorption auf.

Die in Abb. 6d enthaltenen Ergebnisse für Stahlbeton zeigen, daß das Kriterium der äquivalenten Zugfestigkeit,