35. Bažant, Z.P. (1968). "Conditions of deformation instability of a continuum and their application to thick slabs and a half space" (in Czech with English summary), *Stavebn'icky ˇ Casopis* (SAV, Bratislava), 16, 48–64. 35

STAVEBNÍCKY ČASOPIS

Z.P.Bažant

Podmínky nestability deformace kontinua a jejich užití na tlusté stěny a poloprostor

Stavebnícky časopis SAV roč.16, č.1, str. 48-64

SEPARÁTNY VÝTLAČOK

VYDAVATEĽSTVO
SLOVENSKEJ AKADÉMIE VIED
BRATISLAVA

fication of reinforcement is found by Eq. (38) following from Eq. (1) Eq. (41) may be used for more complicated relationships of the variation in time.

The plasticity of the reinforcement is assumed to be governed by Eq. (13). In order to satisfy the Eq. (13) at the beginning of the plastification, the constant D is defined in the paper by Eq. (16). The linearized relationship of plastification (20) is also taken into account.

The linearized relationship of plastification leads to Eq. (60) for the dynamic ultimate moments in the plastic hinges and for the angular velocities of the rigid portions of the plate. The adopted nonlinear relationship of plastification implies similar relationships (62).

In the elastic range the motion equation (24) is chosen as the point of departure. It is assumed that the sides $y = 0$ and $y = l_y$ are simply supported and the two remaining parallel edges are perfectly built in, or simply supported or one of the edges may be built in whereas the other simply supported.

The elastic stage ends at the moment $t = \tau$, when it is assumed that all plastic hinges have suddenly developped. It is assumed that the layout of the hinges is the same as that under the statical load, their position being unchanged in the course of the deformation, which is in agreement with the result of tests [11]. The rate at the beginning of the plastic stage is to be found by the equality of moments at the end of the elastic and at the begining of the plastic stage.

The motion equation in the plastic stage has been derived by the theorem of virtual displacements. In the case of the linearized plastification relationship its form is (68) and its solution is given by (70). The nonlinear relationship of plastification is governed by the motion equation (73).

Furthermore, the author presents the solution of a particular case of effect of a uniformly distributed instantaneous impulse governed by the nonlinear relationship of the plastification. The relationship of the dynamic ultimate moment $M_{y0}(t^*)$ vs time t is given by equation (90) and relationship (91) holds for the angle $\zeta_y(t^*)$. The time of the maximum deformation $t_m^* = t - \tau$, the maximum angle $\zeta_y(t_m^*)$ and the maximum deflection in the middle of the plate is given by formulae (92), (93) and (94).

The derived relationships can be used for the assessment of the effect of a uniformly distributed dynamic load variable in time according to arbitrary law of variation.

Discussion of this paper should be sent in triplicate (one copy not exceeding 2 pages) to the Editor by 30. 4. 1968, to be published in the October issue of this Journal.

STAVEBNÍCKY ČASOPIS SAV XVI, 1 — BRATISLAVA 1968

PODMÍNKY NESTABILITY DEFORMACE KONTINUA A JEJICH UŽITÍ NA TLUSTÉ STĚNY A POLOPROSTOR

ZDENĚK P. BAŽANT

Pro řešení stability tlustých stěn, hranolů nebo poloprostoru podle obr. 1 nelze vystačit s klasickou teorií stability tenkých stěn, skořepin a prutů, ale je nutno vyjít z obecné teorie nestability deformace trojrozměrných těles, resp. z teorie jejich deformací při počáteční napjatosti, neboť na rozdíl od prutů a tenkých stěn nejsou příčné deformace v tahu a smyku, vznikající při nestabilitě, zanedbatelné. Tomuto problému byla již věnována úctyhodná řada prací, počítaje G. H. Bryanem 1889 [6] a J. Hadamardem 1903 [10] (dále [17, 2, 19] aj.). Přesto však stále se jednotlivé teorie navzájem zásadně různí (vyjma pro pruty nebo tenké stěny). V poslední době existují čtyři navzájem zásadně odlišné teorie, a to teorie M. A. Biota [3, 4], H. Neubera [12, 13, 7], V. V. Novožilova [14] a C. E. Pearsona [15]. Teorie Pearsona je dnes v zásadě uznávána většinou teoretiků, např. R. Hillem [11], W. Pragerem [16], A. E. Greenem a J. E. Adkinsem [9], C. Truesdellem [20] a vyjdeme z ní též v této práci. Musíme však poznamenat, že naproti tomu teorie Neubera a zvláště M. A. Biota [4] byly již použity na řadu praktických úloh.

Různost dosavadních teorií má tyto důvody: Předně je to kriterium stability, které lze uvažovat např. energetické (Hadamard, Pearson, Hill, Prager, Green a Adkins, Truesdell, Biot) nebo rovnováhové, tj. podmínka existence sousedního rovnovážného stavu (Biot, Neuber, Novožilov). V zásadě obě metody musí být totožné (pro konzervativní síly [15]). U rovnováhové metody je však v obecném případě problematická statická interpretace (tj. interpretace silami působícími na ploškách nějakého elementu) složek tenzoru změny napětí (σ_{ij}) vůči počátečnímu rovnovážnému stavu, vázaných přírůstkovým zákonem pružnosti se složkami tenzoru změny deformace (ε_{ij}). (C. E. Pearson [15] dosahuje shody s rovnováhovou metodou tím, že definuje napětí podle Murnaghana energeticky, pomocí prvních derivací specifické potenciální energie podle složek deformace, čímž vlastně obchází zmíněnou statickou interpretaci a není to tedy rovnováhová metoda v tom smyslu, jak jí používají např. Biot, Neuber, Novožilov). Dále odlišnost teorií je též dána růzností definice tenzoru velké deformace (ε_{ij}), který se uplatňuje ve výraze pro práci počátečních napětí S_{ij}. Toto, jak ukážeme, je jediným důvodem pro nesouhlas M. A. Biota [3, 4], s kriteriem C. E. Pearsona [15], uznávaným dnes většinou autorů. Naproti tomu teorie Neubera nebo Novožilova, užívající též rovnováhovou metodu, jsou v zásadní neshodě s tímto kriteriem. Proti teorii Biota nebo Novožilova máme též námitku, že nejsou ve shodě s technickou teorií stability prutů nebo desek, uvažuje-li se smyková deformace (jako např. u sandvičových desek).

V této práci užijeme proto energetickou metodu ve smyslu kriteria C. E. Pearsona [15] a odvodíme diferenciální rovnice rovnováhy pro kontinuum s počáteční napjatostí. Budeme přitom postupovat metodou malých perturbací počátečního rovnovážného stavu, čímž problém linearizujeme. Naznačíme pak řešení základních pří-

padů nestability tlustých stěn a poloprostoru podle obr. 1 a jejich význam pro teorii porušení podélnou trhlinou při tlaku.

1. Základní označení a vztahy

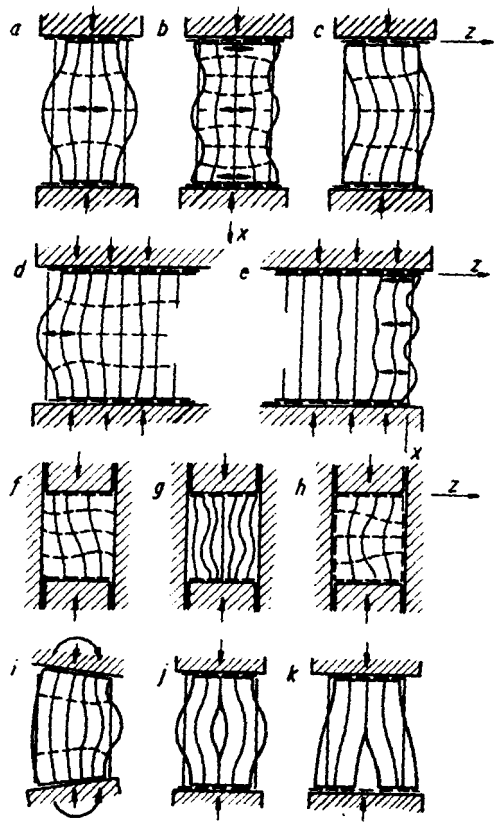
Označme x_i ($i = 1, 2, 3$) nebo x, y, z pravoúhlé souřadnice hmotných bodů ve stavu počáteční rovnovážné deformace (stav II) a x'_i jejich souřadnice po změně deformace (stav III), tj. po přemístěních u_i nebo u, v, w; $x'_i = x_i + u_i$. Nedeformovaný stav I nepotřebujeme zavádět. Pro indexy dvakrát se opakující uvažujme Einsteinovo sumační pravidlo. Značme $\partial u_k / \partial x_i = u_{k,i}$ apod.

Tenzor konečné změny deformace (Lagrangeův) podle definice obecně přijaté má tvar:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j}, \tag{1}$$

kde

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2}$$



Obr. 1.

je tenzor malé směny deformace. Dále označíme $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x$, $2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$, $e_{11} = e_x$, ... V počátečním rovnovážném stavu působí napětí S_{ij} (Eulerova), resp. $S_x, S_y, S_{xy}, \ldots$ na povrchu S tělesa zatížení P_i, resp. $P_x, \ldots$ a v objemu V objemové síly F_i, resp. $F_x, \ldots$ Zavedením malých přídavných sil povrchových p_i, resp. $p_x, \ldots$ a sil objemových f_i, resp. $f_x, \ldots$, tj. perturbací („mrtvé zatížení") vznikne malá změna deformace e_{ij}, jež vyvolá změny napětí σ_{ij} nebo $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \ldots$ dané přírůstkovým anizotropním zákonem pružnosti

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl} e_{kl} \tag{3}$$

nebo specielně ortotropním zákonem

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_{xx} e_x + E_{xy} e_y + E_{xz} e_z, \\ \tau_{xy} &= 2G_{xy} e_{xy}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3a}$$

kde C_{ij}^{kl} nebo E_{xx}, E_{xy}, G_{xy} jsou elastické konstanty. Statický význam napětí σ_{ij} nezavádíme a rov. (3) (nebo výraz (4)) je nutno považovat za jejich definici.

2. *Energetické kriterium stability*

Potenciální energie malé změny deformace na jednotku počátečního objemu je:

$$S_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\sigma_{ij} e_{ij}. \tag{4}$$

Zde jsme nuceni uvažovat pro práci S_{ij} tenzor konečné deformace ε_{ij} vyjádřený přesně až po členy druhého řádu, i když přemístění u_i jsou malá, neboť σ_{ij} je malé vůči S_{ij} a člen $\sigma_{ij} e_{ij}$ je druhého řádu v $u_{i,j}$, zatímco člen $S_{ij} e_{ij}$ je prvého řádu. Ve výraze (4) oddělme členy druhého řádu a integrujme přes celý objem tělesa, čímž dostaneme změnu potenciální energie vnitřních sil tělesa:

$$\Delta U = \int_V S_{ij} e_{ij} \, \mathrm{d}V + \int_V S_{ij}(\varepsilon_{ij} - e_{ij}) \, \mathrm{d}V + \int_V \frac{1}{2} C_{ij}^{kl} e_{ij} e_{kl} \, \mathrm{d}V. \tag{5}$$

Uvážíme-li, že počáteční napětí jsou v rovnováze, tj.:

$$S_{ij,j} + F_i = 0 \qquad \text{(v objemu } V\text{)}, \tag{6a}$$

$$n_j S_{ij} = P_i \qquad \text{(na povrchu } S\text{)}, \tag{6b}$$

kde n_j je jednotkový vektor vnější normály na povrchu S, můžeme prvý integrál ve výrazu (5) přetvořit užitím Gaussovy věty [16], [5a] o převodu integrálu objemového na povrchový:

$$\begin{aligned} \int_V S_{ij} e_{ij} \, \mathrm{d}V &= \int_V S_{ij} u_{i,j} \, \mathrm{d}V = \\ &= -\int_V S_{ij,j} u_i \, \mathrm{d}V + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(S_{ij} u_i) \, \mathrm{d}V = \end{aligned} \tag{7}$$

$$= -\int_V S_{ij,j} u_i \, dV + \int_S n_j S_{ij} u_i \, dV.$$

Přidáme-li práci perturbací p_i a f_i, které pokládáme za „mrtvé" zatížení, tj. neměnného směru a velikosti, představuje poslední výraz práci ΔW vnějších sil při změně deformace:

$$\Delta W = \int_V (F_i + f_i) u_i \, dV + \int_S (P_i + p_i) u_i \, dS. \tag{8}$$

Změna $\Delta \Pi$ celkové potenciální energie tělesa Π vůči počátečnímu rovnovážnému stavu je $\Delta \Pi = \Delta U - \Delta W$, čili s ohledem na identitu (7):

$$\Delta \Pi = \int_V S_{ij}(\varepsilon_{ij} - e_{ij}) \, dV + \int_V \frac{1}{2} C_{ij}^{kl} e_{ij} e_{kl} \, dV - \tag{9}$$

$$- \int_V f_i u_i \, dV - \int_S p_i u_i \, dS.$$

Nový rovnovážný stav, který těleso zaujme po zavedení přídavných zatížení p_i a f_i, je dán podmínkou minima změny potenciální energie $\Delta \Pi$, k čemuž nutnou podmínkou je, aby její první variace byla nulová:

$$\delta(\Delta \Pi) = 0. \tag{10}$$

Současně dostáváme též kriterium stability počátečního stavu: Aby v počátečním rovnovážném stavu byla potenciální energie lokálním minimem, musí výraz (9) při $f_i = p_i = 0$ být kladný, pozitivně definitní pro libovolné kinematicky přípustné ε_{ij} a u_{ij}. Dosadíme-li za ε_{ij} tenzor (1), dostáváme tak Pearsonovo kriterium (13) [15]. V méně obecném tvaru je odvodil již Hadamard 1903 ([10], rov. VI. 18 a VI. 20).

3. *Diferenciální rovnice rovnováhy*

Označíme-li integrand prvního a druhého integrálu ve výraze (9) jako I_0 a I_1 a dále $I = I_0 + I_1$, můžeme tuto podmínku postupně psát ve tvarech:

$$\delta \int_V I(u_{i,j}) \, dV - \delta \int_V f_i u_i \, dV - \delta \int_S p_i u_i \, dS =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial I}{\partial u_{i,j}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i) - f_i \delta u_i \right] dV - \int_S p_i \delta u_i \, dS = \tag{11}$$

$$= \int_V \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial I}{\partial u_{i,j}} - f_i \right] \delta u_i \, dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial I}{\partial u_{i,j}} \delta u_i \right] dV - \int_S p_i \delta u_i \, dS =$$

$$= \int_V \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial I}{\partial u_{i,j}} - f_i \right] \delta u_i \, dV + \int_S \left[n_j \frac{\partial I}{\partial u_{i,j}} - p_i \right] \delta u_i \, dS,$$

kde jsme zaměnili pořadí variace δ s integrováním a derivováním (předpokládajíce, že ∂u_i splňuje okrajové podmínky pro u_i) a použili Gaussovu větu (16), (5a). Abychom anulovali poslední výraz (11) pro libovolnou přípustnou variaci δu_i, musí být v celém objemu:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial I}{\partial u_{i,j}}\right) + f_i = 0 \tag{12}$$

(Eulerovy podmínky) a na celém povrchu, na němž je dáno zatížení:

$$n_j \frac{\partial I}{\partial u_{i,j}} = p_i \,. \tag{13}$$

Zde můžeme dosadit ($I = I_0 + I_1$):

$$\frac{\partial I_1}{\partial u_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial e_{ij}}\left(\frac{1}{2} C^{kl}_{pq} e_{pq} e_{kl}\right) = \sigma_{ij} \tag{14}$$

a označíme-li:

$$\frac{\partial I_0}{\partial u_{i,j}} = S_{pq} \frac{\partial(\varepsilon_{pq} - e_{pq})}{\partial u_{i,j}} = \vartheta_{ij} \,, \tag{15}$$

máme místo (12) a (13) podmínky:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_{ij,j} + \vartheta_{ij,j} + f_i = 0 \\ &n_j\sigma_{ij} + n_i\vartheta_{ij} = p_i \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &\text{(v objemu } V) \qquad (16) \\ &\text{(na povrchu } S) \qquad (17) \end{aligned}$$

Jsou to diferenciální rovnice rovnováhy a povrchové podmínky rovnováhy pro změny napětí σ_{ij} vůči počátečnímu rovnovážnému stavu. Jestliže položíme $f_i = p_i = 0$, jsou to pak diferenciální rovnice a povrchové podmínky nestabilní rovnováhy, jejichž nenulové řešení představuje tvary ztráty stability. Vůči obvyklým rovnicím rovnováhy obsahují rov. (16) a (17) navíc členy $\vartheta_{ij,j}$ a $n_j\vartheta_{ij}$, závislé na deformaci a mající význam objemových a povrchových sil.

Zbývá ještě vyjádřit napětí ϑ_{ij}. Teprve zde potřebujeme zavést výraz pro tenzor konečné deformace, jejž uvažujeme ve tvaru (1). Dosadíme-li jej do (15), můžeme vypočíst ($S_{ij} = S_{ji}$):

$$\vartheta_{ij} = S_{pq} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_{i,j}} (u_{r,p} u_{r,q}) = S_{jk} u_{i,k} \,, \tag{18}$$

$$(\vartheta_{ij,j} = S_{jk} u_{i,jk} - F_k u_{i,k};\; n_j\vartheta_{ij} = P_k u_{i,k}),$$

kde jsme uvažovali rov. (6a). Vidíme, že tenzor ϑ_{ij} je nesymetrický.

Poznámka ke statickému významu napětí σ_{ij}. Jestliže definujeme nesymetrický tenzor napětí $\Theta_{ij} = S_{ij} + \vartheta_{ij} + \sigma_{ij}$, vyplývá z (16) a (17), s ohledem na (6a, b):

$$\begin{aligned} &\Theta_{ij,j} + F_i + f_i = 0 \qquad &&\text{(v objemu } V), \\ &n_j\Theta_{ij} = P_i + p_i \qquad &&\text{(na povrchu } S). \end{aligned} \tag{18a}$$

Napětí Θ_{ij} jsou tedy celkové síly na deformovaném krychlovém elementu, vztažené na plošky v počátečním stavu. Nazývají se Lagrangeův (16) (nebo Boussinesqův) tenzor napětí. Vztah mezi Θ_{ij} a Eulerovými napětími T_{ij}, tj. skutečnými napětími působícími na krychlový element vyříznutý až po deformaci tělesa, je (viz (15), rov. IX. 4. 3):

$$T_{ik} = (\Theta_{ik} + \Theta_{ij} u_{k,j}) / D; \; \Theta_{ij} = D(T_{ij} - T_{ik} u_{j,k}),$$

kde

$$D = \det (\partial r_i' / \partial x_j) \approx 1 + u_{i,i}. \tag{18b}$$

Dosadíme-li do rovnic (16) a (17) σ_{ij} vyjádřené podle zákona pružnosti (3), v něm ž místo e_{ij} píšeme (2), obdržíme diferenciální rovnice (v dopise autora M. A. Biotovi, 29. XI. 1965):

$$\frac{1}{2} C_{ij}^{kl}(u_{k,lj} + u_{l,kj}) + S_{jk} u_{i,jk} - F_k u_{i,k} + f_i = 0 \tag{19}$$

a okrajové podmínky na povrchu, kde je dáno zatížení:

$$n_j \left(\frac{1}{2} C_{ij}^{kl} u_{k,lj} + u_{l,kj} + S_{jk} u_{i,k} \right) = p_i. \tag{20}$$

Uvažujeme-li ortotropní materiál o zákonu pružnosti (3), dostáváme místo (19) specielně rovnice (pro $F_i = 0$):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(E_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + E_{xy}\frac{\partial v}{\partial y} + E_{xz}\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[G_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left[G_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \left(S_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + S_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \right. \\ &\left. + 2S_{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2S_{yz}\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2S_{xz}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right) + fx = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

. . . . . .

Napišme ještě okrajové podmínky pro povrch tělesa daný rovinou $z = z_1$:

$$\begin{aligned} &E_{xz}\frac{\partial u}{\partial x} + E_{yz}\frac{\partial v}{\partial y} + E_{zz}\frac{\partial w}{\partial z} + S_z\frac{\partial w}{\partial z} + S_{xz}\frac{\partial w}{\partial x} + S_{yz}\frac{\partial w}{\partial y} = p_z, \\ &G_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + S_{xz}\frac{\partial u}{\partial x} + S_{yz}\frac{\partial u}{\partial y} + S_z\frac{\partial u}{\partial z} = p_x, \\ &G_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + S_{xz}\frac{\partial v}{\partial x} + S_{yz}\frac{\partial v}{\partial y} + S_z\frac{\partial v}{\partial z} = p_y. \end{aligned} \tag{22}$$

3.1. Poznámky k jiným teoriím stability

Biotovy rovnice II.2.24 [4] se liší od (16) a (17) tím, že v nich místo (18) stojí:

$$\vartheta_{ij} = S_{jk} u_{i,k} - \frac{1}{2} S_{jk} e_{ik} - \frac{1}{2} S_{ik} e_{jk}, \tag{22a}$$

což je důsledkem jedině toho, že místo (1) Biot uvažuje jiný výraz pro ε_{ij}. Nejobecnější tenzor obsahující všechny možné členy 2. řádu v $u_{i,j}$ můžeme zapsat ve tvaru:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + a u_{k,i} u_{k,j} + b e_{ki} e_{kj} + c(e_{ki}\omega_{kj} + e_{kj}\omega_{ki}), \tag{22b}$$

kde $\omega_{ki} = \frac{1}{2}(u_{k,i} - u_{i,k})$. Základní podmínkou pro ε_{ij} je, aby pro rotaci jako tuhé těleso bylo $\varepsilon_{ij} \equiv 0$ alespoň až po členy 2. řádu. Odtud plyne $a = 1/2$ při libovolném b, c; současně tím jsou zajištěny správné hodnoty $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$ pro případ velkých průhybů u_3 tenké desky, kdy $u = v = e_{11} = e_{12} = 0$. Klademe-li však dále podmínky, aby pro prostý smyk daný transformací: $u = w = 0$, $v = bx$ bylo $\varepsilon_{22} = 0$ a $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} k^2$, dostáváme jednoznačně $b = c = 0$. Současně jsou splněny podmínky, aby pro čistý smyk $u = by$, $v = bx$, $w = 0$ bylo $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \frac{1}{2} k^2$ aj. Naproti tomu však Biotův výraz I. 3. 28 [4] odpovídá hodnotám $b = -\frac{1}{2}$, $c = 0$, což dává např. pro případ prostého smyku nesprávné hodnoty $\varepsilon_{22} = -\frac{1}{8} k^2$, $\varepsilon_{11} = \frac{3}{8} k^2$ a pro případ čistého smyku nesprávné hodnoty $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$. Zejména tyto hodnoty nevyhovují na povrchu tělesa.

Rovnice rovnováhy Novožilova ([14], eq. V. 16) mají opět jiný tvar, v němž členy druhého řádu jsou úměrné lokální rotaci, totiž: $\vartheta_{ij} = \frac{1}{2} S_{jk}(u_{i,k} - u_{k,i})$. Potom však ϑ_{ij} nelze psát ve tvaru (15), což je nutno považovat za zásadně nesprávné.

V teorii stability H. Neubera [12, 13, 7] se píší pro σ_{ij} klasické rovnice rovnováhy $\sigma_{ij,j} = 0$ a uvažuje se:

$$T_{ij} = (\sigma_{ij}/D) + S_{kl}(\partial x_i/\partial x'_k)(\partial x_j/\partial x'_l) = S_{ij} - S_{jk} u_{i,k} - S_{ik} u_{j,k} + \sigma_{ij}/D,$$

takže členy druhého řádu se objevují pouze v okrajových podmínkách $n'_j T_{ij} = P'_i = P_i/D$. Nestabilita tělesa, jehož celý povrch je tuze podepřen (případ Hadamarda), by byla nemožná.

3.2. Vztah k teorii vzpěru prutů a desek

Klasická teorie vzpěru prutů a desek je specielním případem našich rovnic. Uvažujme prut s osou $x_1 = x$ a břemenem P. Počáteční napětí jsou $S_x = S_{11} = -P/F$, $S_y = S_z = 0$, kde F je plocha průřezu. V rovnici (16) člen $\vartheta_{ij,j}$ má význam objemové síly, $\vartheta_{ij,j} = -F^*_i$. V našem případě v rovině (x, z) podle (18) je:

$$F^*_z = -S_x \partial^2 w/\partial x^2, \tag{22c}$$

což dává v celém průřezu výslednici: $P\partial^2 w/\partial x^2$, což je správný výsledek [18]. Podobně pro tenkou desku v rovině (x, y) obdržíme podle (16):

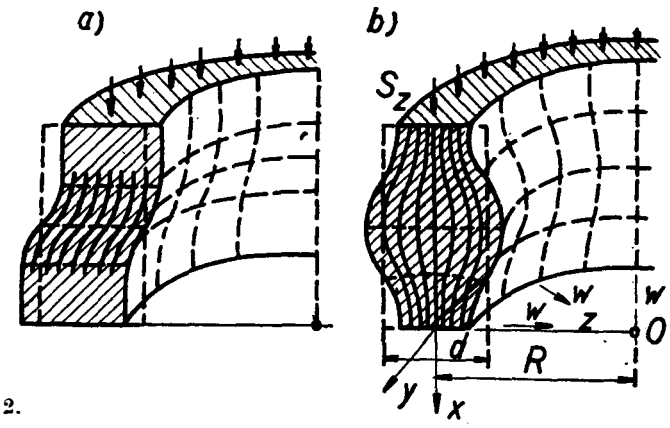
$$F^*_z = -S_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + S_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{22d}$$

což je též známý výraz ([18], str. 348). Tytéž výsledky obdržíme, i když v prutu nebo desce bereme v úvahu deformaci od posouvajících sil, tj. za předpokladu zachování přímé, ale nikoliv kolmé normály, jako je tomu u sendvičových desek. Pro prut tento předpoklad zní $w = w(x)$, $u = (z - w)\psi(x)$, kde ψ je pootočení průřezu a $\psi + \partial w/\partial x$ je zkosení úhlu. Určíme-li však F_z^* podle (15) pro Biotův výraz ε_{ij} (rov. (22b), $a = -b = \frac{1}{2}$, $c = 0$), obdržíme při tomto předpokladu síly $F_z^* = S_x \left(\frac{3}{4}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$, jejichž výslednice v průřezu není rovna druhé derivaci ohybového momentu $-Pw$, což je nesprávný výsledek. Podobně to platí i pro teorii Novožilovu (14).

4. *Některá řešení periodického tvaru*

Naznačíme nyní stručně některé aplikace. Uvažujme ortotropní tlustou desku (obr. 1a, b) omezenou dvěma rovinami $z = z_1$ a $z = z_2 (d = z_2 - z_1)$, resp. pro $z_2 \to \infty$ poloprostor (obr. 2d, e). Nechť osy ortotropie se shodují se souřadnými osami x, y, z. Nechť počáteční napjatost je homogenní a nechť $S_{xy} = S_{yz} = S_{xz} = 0$. Hledejme řešení periodické ve směru x a y ve tvaru:

$$\begin{aligned} u &= \xi(z) \sin \alpha x \cos \beta y, \\ v &= \eta(z) \cos \alpha x \sin \beta y, \\ w &= \zeta(z) \cos \alpha x \cos \beta y. \end{aligned} \tag{23}$$



Obr. 2.

Dovoluje to splnit okrajové podmínky na koncích desky pro podepření na tuhé podložce bez tření: $u = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0$ pro $x = 0$ a $x = n\pi/\alpha$; $v = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0$ pro $y = 0$ a $y = m\pi/\beta$.
Perturbace uvažujme ve tvaru:

$$\begin{aligned} &f_x = f_y = p_x = p_y = 0, \\ &f_z = f_{z0} \cos \alpha x \cos \beta y, \quad p_z = p_{z0} \cos \alpha x \cos \beta y. \end{aligned} \tag{24}$$

Rovnice (21) jsou potom splněny, když:

$$
\begin{gathered}
(-G_{xz} + S_z)\xi'' + [\alpha^2(E_{xx} + S_x) + \beta^2(G_{xy} + S_y)]\xi + \\
+ \alpha\beta(E_{xy} + G_{xy})\eta + \alpha(E_{xz} + G_{xz})\zeta' = 0, \\
\alpha\beta(E_{xy} + G_{xy})\xi - (G_{yz} + S_z)\eta'' + \\
+ [\alpha^2(G_{xy} + S_x) + \beta^2(E_{yy} + S_y)]\eta + \beta(E_{yx} + G_{yz})\zeta' = 0, \\
\alpha(E_{xz} + G_{xz})\xi' + \beta(E_{yz} + G_{yz})\eta' + \\
+ (E_{zz} + S_z)\zeta'' - [\alpha^2(G_{xz} + S_x) + \beta^2(G_{yz} + S_y)]\zeta = 0,
\end{gathered}
\tag{25}
$$

kde $\xi' = \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}z$ apod.

Okrajové podmínky na $z = z_1$ a z_2 podle (22) pro $S_z = 0$ jsou:

$$
\begin{gathered}
(a\alpha E_{xz} + b\beta E_{yz} + c\gamma E_{zz}) \cos \gamma z_1 = p_0, \\
(a\gamma + c\alpha) \sin \gamma z_1 = 0, \\
(b\gamma + c\beta) \sin \gamma z_1 = 0.
\end{gathered}
\tag{26}
$$

Dostali jsme tak okrajovou úlohu, nebo při $p_0 = f_{z0} = 0$ problém vlastních hodnot pro systém tří obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu.

Jednoduché partikulární řešení lze při $f_{z0} = f_0 \sin \gamma z$ najít ve tvaru:

$$
\xi = a \cos \gamma z, \quad \eta = b \sin \gamma z, \quad \zeta = c \sin \gamma z. \tag{27}
$$

Povrchové podmínky (26) se splní např. vztahy $\alpha/\gamma = -a/c$, $\beta/\gamma = -b/c$, $\gamma = \dfrac{\pi}{d}$, $\dfrac{3\pi}{d}, \cdots$ avšak současně je v celém objemu $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Dosazením (27) do (25) dostaneme systém algebraických rovnic [1, 1a], z nějž plyne:

$$
c = -\frac{f_0}{\gamma^2 C} \frac{(E_{xx} + S_x)(E_{yy} + S_y)}{1 - S_x/S_x^* - S_y/S_y^*}, \tag{28}
$$

kde C je jistá funkce modulů; při rovinné deformaci, tj. $b = 0$, je: $C = E_{xx}E_{zz} - E_{xz}^2$; S_x^*, S_y^* jsou kritická napětí ($c \to \infty$) při jednoosém tlaku:

$$
S_x^* = -\frac{E_{xx}E_{zz} - E_{xz}^2}{E_{zz} + E_{xz}}. \tag{29}
$$

Při dvojosém tlaku podmínka nestability ($c \to \infty$) je dána anulováním jmenovatele v (25a). Tento „extenzní" tvar nestability podle (29) může být nebezpečný pouze pro $E_{zz} \ll -E_{xz} \ll E_{xx}$, $E_{z2} \to 0$, kdy $S_x^* \approx E_{xz}$.

Obecné řešení naznačme pouze pro rovinnou deformaci, $b = 0$. V případě, kdy charakteristická rovnice 4. stupně systému (25) má čtyři kořeny ryze imaginární $\pm ik_1$, $\pm ik_2$, má obecné řešení tvar:

$$
\begin{gathered}
\xi = a_1 \cos k_1\alpha z + a_2 \cos k_2\alpha z, \\
\zeta = c_1 \sin k_1\alpha z + c_2 \sin k_2\alpha z
\end{gathered}
\tag{30}
$$

($k_1 = k_2$ by vedlo na (27)). Funkcemi (30) lze vyhovět okrajovým podmínkám (26) na volném nezatíženém povrchu $z_1 = -\mathrm{d}/2$, $z_2 = \mathrm{d}/2$ (obr. 1a, b). Jinak lze jimi však vyhovět i podmínkám tuze vetknutého povrchu pro $z = 0$ a $z = d$ (pružná vrstva uzavřená v tuhém materiálu, obr. 1f, g), nebo též podmínkám tuhého podepření bez tření (obr. 2h), tj. $w = \tau_{xz} = 0$. Nejmenší kritické napětí je (1, 1a):

$$\operatorname{Inf}(-S_{x_{crit}}) = G_{xz} \tag{31}$$

a délka vlny se pro něj blíží nule.

V případě, kdy charakteristická rovnice má čtyři kořeny reálné $\pm l_1$, $\pm l_2$ ($l_1 \neq l_2$), obecné řešení má tvar:

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 e^{l_1 \alpha z} + a_2 e^{l_2 \alpha z} + a_3 e^{-l_1 \alpha z} + a_4 e^{-l_2 \alpha z}, \\ \zeta &= c_1 e^{l_1 \alpha z} + c_2 e^{l_2 \alpha z} + c_3 e^{-l_1 \alpha z} + c_4 e^{-l_2 \alpha z}. \end{aligned} \tag{32}$$

Omezíme-li se na prvé dva členy ($a_3 = a_4 = c_3 = c_4 = 0$), můžeme řešit poloprostor $z < 0$. Pro určitá kritická napětí splňující podmínku $-S_x > G_{xz}$ je možno splnit povrchové podmínky (26); délka vlny $2\pi/\alpha$ nezávisí na S_x.

V případě, kdy charakteristická rovnice má čtyři kořeny komplexní $\pm r_1 \pm i r_2$, je obecné řešení:

$$\begin{aligned} \xi &= (a_1 \operatorname{ch} r_1 \alpha z \cos r_2 \alpha z + a_2 \operatorname{sh} r_1 \alpha z \sin r_2 \alpha z) + \\ &\quad + (a_3 \operatorname{sh} r_1 \alpha z \cos r_2 \alpha z + a_4 \operatorname{ch} r_1 \alpha z \sin r_2 \alpha z), \\ \zeta &= (c_1 \operatorname{ch} r_1 \alpha z \sin r_2 \alpha z - c_2 \operatorname{sh} r_1 \alpha z \cos r_2 \alpha z) + \\ &\quad + (c_3 \operatorname{sh} r_1 \alpha z \sin r_2 \alpha z - c_4 \operatorname{ch} r_1 \alpha z \cos r_2 \alpha z). \end{aligned} \tag{33}$$

Antisymetrická část tvořená třetím a čtvrtým členem limituje pro $z_1 - z_2 \to 0$ ke klasickému řešení Eulerovu [18].

Složitější případy je vhodné řešit přibližně Ritzovou metodou. Uvažujme tlustou desku $z_1 < z < z_2$ namáhanou tlakem a ohybem, tj. $S_x = S_0 + \mu S_1$, $\mu = z/\mathrm{d}$ a příčným konstantním napětím S_z. Zavedeme rovinnou deformaci a perturbace obecně ve tvaru:

$$\begin{aligned} u &= -a \sin(\pi x/l)\varphi(\mu), \quad w = c \cos(\pi x/l)\psi(\mu); \\ f_z &= f_0 \cos(\pi x/l)\psi(\mu). \end{aligned} \tag{34}$$

Po dosazení do (9) z podmínek minima $\partial(\Delta\Pi)/\partial a = 0$, $\partial(\Delta\Pi)/\partial c = 0$ dostaneme:

$$\begin{aligned} c = \frac{f_0 l^2}{\pi^2} \Bigg[& S_0 + S_1 \frac{C_6}{C_2} + \frac{C_4 l^2}{\pi^2 C_2 \mathrm{d}^2} (E_{zz} + S_z) + \\ & + G_{xz} \left(1 - \frac{l^2}{\mathrm{d}^2} \frac{C_3 C_8}{C_2} \frac{G_{xz}/E_{xx}}{1 + C_8 (l^2/\mathrm{d}^2)(G_{xz} + S_z)/E_{xx}} \right) \Bigg]^{-1}, \end{aligned} \tag{35}$$

kde

$$C_8 = \frac{C_3}{C_1 C_7 \pi^2}, \quad C_7 = 1 + \frac{S_0}{E_{xx}} + \frac{C_5}{C_1} \frac{S_1}{E_{xx}} \approx 1,$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi^2 \, \mathrm{d}\mu, \quad C_2 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \psi^2 \, \mathrm{d}\mu, \quad C_3 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\mu} \right)^2 \mathrm{d}\mu, \\ C_4 &= \int_{\mu_1}^{\mu_2} \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\mu} \right)^2 \mathrm{d}\mu, \quad C_5 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu \varphi^2 \mathrm{d}\mu, \quad C_6 = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu \psi^2 \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{36}$$

Specielně pro symetrickou deformaci při $S_0 = S_x$, $S_1 = 0$ podle obr. 1a je vhodné zvolit $\varphi(z) = -\cos(\pi z/\mathrm{d}) + 2/\pi$, $\psi(z) = \sin(\pi z/\mathrm{d})$, což dává $C_4/C_2 = 2\pi^2$, $\pi^2 C_1/C_3 =$

$= 1 - 8/\pi^2$, $C_3 = C_2$. Pro nesymetrickou deformaci podle obr. 1 i v tlačené zóně při ohybu desky tloušťky 2d můžeme zvolit: $\varphi(\mu) = \mu^2 - 5\mu^4/3$, $\psi(\mu) = d\varphi/d\mu$, což dává: $C_1 = 0{,}0325$, $C_2 = C_3 = 2{,}36$, $C_4 = 57{,}3$, $C_5 = 0{,}0278$, $C_6 = 2{,}11$. Můžeme se přesvědčit, že nejmenší kritická napětí v tlaku ($c \to \infty$) jsou v obou případech opět přibližně rovna $-G_{xz}$. Platí to i zcela obecně podle (25), když délka půlvlny l/d je malá.

Při dvojosém tlaku S_x, S_y můžeme nejjednodušeji uvažovat pro nesymetrickou deformaci („smykový") tvar: $u = v = 0, w = c \cos \alpha x \cos \beta y, f_z = f_0 w/c$. Z podmínky $\partial(\Delta\pi)/\partial c = 0$ pak plyne:

$$c = f_0[\alpha^2(G_{xz} + S_x) + \beta^2(G_{yz} + S_y)]^{-1}. \tag{37}$$

Nestabilita ($c \to \infty$) tedy nastane, když je buď $-S_x \geqslant G_{xz}$, nebo $-S_y \geqslant G_{yz}$.

Podobně pro symetrickou deformaci, uvažujeme-li

$$u = v = 0, \quad w = c \cos \alpha x \cos \beta y \sin (\pi z/d), \quad f_z = f_0 w/d,$$

dostaneme:

$$c = f_0[\alpha^2(G_{xz} + S_x) + \beta^2(G_{yz} + S_y) + \pi^2 E_{zz}/d]^{-1}. \tag{38}$$

Další úlohy, jež by bylo třeba řešit, jsou tlusté desky porušené jednou nebo více dlouhými trhlinami (obr. 1j, k) aj. Případ soustavy průběžných hustých rovnoběžných trhlin limituje k Eulerově teorii.

Rovnice (16)—(26) lze též přímo zobecnit pro viskoelastický materiál, zamění-li se pružnostní konstanty $G_{xz}, E_{xx}, E_{xz}, \ldots$ za příslušné operátory dotvarování $-G_{xz}, \ldots$ v čase. Lze ukázat, že když pro daný časový interval průběh relaxačního modulu $G_{xz\mathrm{rel}}(t)$ aproximujeme křivkou o limitě $G_{xz\mathrm{rel}}(\infty) = G_{xz\infty} > 0$ a když zatížení je stálé, je dlouhodobá konečná deformace a stabilita dána pružnostním řešením se zmenšenými moduly $G_{xz\infty}$ (místo G_{xz}) apod. (např. v podmínce (31)).

Na základě předešlého rozboru můžeme shrnout: V pružném (nebo viskoelastickém) kontinuu jsou možné tvary nestability podle obr. 1, při kterých vznikají příčná tahová a smyková napětí druhého řádu. Nejmenší kritické napětí v tlaku pro tyto tvary je dáno moduly pružnosti. U isotropního kontinua mohou tyto tvary nestability vzniknout jen při velké počáteční deformaci, prakticky pouze u kaučuku. Jelikož však kritické napětí klesá silně s příčnými moduly v tahu a ve smyku, mohou tyto tvary nestability být nebezpečné u ortotropních konstrukčních materiálů.

5. *Význam pro teorii porušení*

Je zřejmé, že pevnost v tlaku nemůže být větší než nejmenší možné kritické napětí. Porušení v tlaku nestabilitou podle obr. 1 vede na trhlinu rovnoběžnou se směrem tlaku, jež je, jak známo, typickým způsobem porušení nehomogenních ortotropních materiálů (skelné lamináty, různé horniny, dřevo). Vznik trhliny paralelní s tlakem nelze vysvětlit pouhým Poissonovým efektem, ale je nutno předpokládat vznik druhotných příčných tahových a smykových napětí. Efekt tření o opěrnou čelist, lokální střídavá napětí v nehomogenní mikrostruktuře, koncentrace napětí u pórů a Griffithových trhlinek, smykový posun na šikmých sevřených ploškách lomené trhlinky a nedokonalosti povrchu, polohy břemen, směru lokálních os ortotropie a hodnot středních modulů vysvětlují vznik nespojitého systému podélných trhlinek,

ale nejsou samy o sobě dostatečným vysvětlením pro vznik dlouhých podélných trhlin v nehomogenních materiálech. Je proto nutno přibrat efekt nestability.

Podmínku pevnosti v tlaku, pokud o pevnosti rozhoduje nestabilita, lze pak zapsat podobně jako podmínku vzpěrné pevnosti sloupů:

$$(C_1 S_x + C_2 S_y) c/c_0 < \varkappa, \tag{39}$$

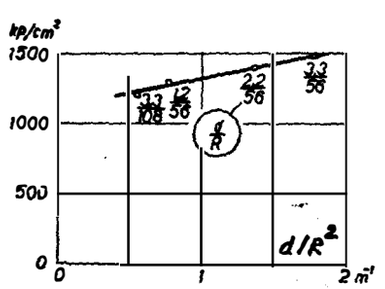
kde $\varkappa$ je průměrná pevnost v příčném tahu, resp. smyku (při podélném tlaku S_x, S_y), $C_1 S_x + C_2 S_y$ jsou průměrná příčná napětí od nedokonalostí, resp. rušivých sil podle teorie I. řádu, C_1, C_2 jsou experimentální koeficienty a c/c_0 je zvětšovací faktor, který lze vzít přibližně podle vzorců (28), (35), (37), (38).

Je možné, že vliv nestability deformace se v poslední fázi porušení projevuje i u některých statisticky isotropních nehomogenních materiálů, jako je beton, keramika a horniny. Lokální příčná napětí, jež se objeví vlivem nehomogenity (zrna, póry, Griffithovy trhlinky), způsobují totiž vždy tahové trhlinky orientované ve směru tlaku, a ty pak mají za následek pokles příčných modulů pružnosti, tj. vznik druhotné ortotropie rozvíjející se s postupem zatěžování. Do jisté míry je třeba tento efekt předpokládat i u skelných laminátů — pevnost v tlaku bývá totiž kolem 1500 kp/cm², avšak teoretický modul G_{xz} by vycházel asi 15 000 kp/cm², kdybychom neuvažovali vznik podélných trhlinek poruchami adheze.

Podle této teorie bylo by též možno vysvětlit vzrůst pevnosti v tlaku se zakřivením stěny skelného laminátu, zjištěný zkouškami L. Skupina [22]. Uvažujme stěnu trubky podle obr. 2. V lokálním pravoúhlém systému souřadnic x, y, z se vliv křivosti projeví tím, že radiální posunutí w vyvolává obvodové protažení $\varepsilon_y = -w/R$. Předpokládáme-li nesymetrickou deformaci podle obr. 2, jež je dána nejjednodušeji rovnicemi (37) ($\alpha = \pi/l$), dostaneme po vyčíslení výrazu (9) z podmínky $\partial(\Delta\pi)/\partial c = 0$:

$$c = f_0 l^2 [\pi^2 (S_x + G_{xz}) + E_{yy}\, l^2/R^2]^{-1}. \tag{40}$$

Pro symetrickou delaminaci podle obr. 2b ve jmenovateli navíc stojí člen $\pi^2 E_{zz} l^2/d^2$. Příslušný zvětšovací faktor pak figuruje v podmínce pevnosti (39) ($C_2 = 0$). Na obr. 3 uvádíme porovnání s výsledky zkoušek pevnosti (vyneseny průměry ze sérií po šesti) v tlaku za ohybu (dvěma břemeny) na trubkách z polyesterového laminátu vyztuženého skelnou tkaninou (o 50% objemu) [22]. Shoda s průběhem kritického napětí vyplývajícím z (40) je dobrá, uvažujeme-li $l = \sqrt{kd}$, kde k je experimentální délková



Obr. 3.

$$|S_{x_{cr}}| = G_{xz}\left(1 + \frac{k E_{yy}}{\pi^2 G_{xz}} \frac{d}{R^2}\right) \tag{59}$$

konstanta (přímce na obr. 3 odpovídá $kE_{yy}/G_{xz} = 177$ cm). (V porovnání s tlustým hranolem tento vliv však nebyl prokázán [23].)

Jinou aplikací této teorie je výpočet tektonických tlaků, jaké působily při vrásnění vrstev v geologii [1c].

Dodatek I. Okrajové podmínky při hydrostatickém zatížení

Při hydrostatickém zatížení P od plynu nebo kapaliny vektor zatížení P'_{nj} v průběhu změny deformace u_i mění směr, tak jak se otáčí normála n'_j povrchu S'. Z toho důvodu by ve výrazu (8) pro ΔW bylo třeba uvažovat ještě přídavný člen W_3 vyššího řádu, který se pak objeví jako $-W_3$ ve výraze (9) pro $\Delta \Pi$. (Výraz W_3 je jinak též dán jako $P\Delta V$, kde ΔV je změna objemu tělesa včetně členů vyššího řádu.) Podle představy o postupném průběhu deformace u'_i v závislosti na jediném parametru t, $u'_i = u_i t$, obdržel Pearson integrováním elementárních prací od $t = 0$ do $t = 1$ výraz [15]:

$$-W_3 = \int_{S_P} \frac{1}{2} (n_l u_l u_{k,k} - n_k u_l u_{k,l}) P \mathrm{d}S_P, \tag{41}$$

který též můžeme zapsat ve tvaru:

$$-W_3 = \int_{S_P} \frac{1}{2} n_r \varepsilon_{prq} \varepsilon_{plk} u_l u_{k,q} P \mathrm{d}S_P, \tag{42}$$

neboť $\varepsilon_{plk} \varepsilon_{prq} = \delta_{lr} \delta_{kq} - \delta_{lq} \delta_{kr}$ [16], [5a];

ε_{ijk} je Levi-Civitův symbol (rovný 1 pro sudé permutace indexů 123, —1 pro liché permutace, jinak 0), S_P je část povrchu, na níž působí hydrostatický tlak P. Ve všech tvarech rov. (11) je pak třeba připojit ještě variaci povrchového integrálu (41), resp. (42):

$$\delta \int_{S_P} I_3(u_i, u_{i,j}) \mathrm{d}S_P = \int_{S_P} \frac{\partial I_3}{\partial u_i} \delta u_i \mathrm{d}S_P + \int_{S_P} \frac{\partial I_3}{\partial u_{i,j}} (\delta u_i)_{,j} \mathrm{d}S_P, \tag{43}$$

kde I_3 je integrand v (41), resp. (42). Dále můžeme vypočíst:

$$\frac{\partial I_3}{\partial u_i} = \frac{1}{2} P(n_i u_{k,k} - n_k u_{k,i}), \tag{44}$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial u_{i,j}} = \frac{1}{2} n_r \varepsilon_{prj} \varepsilon_{pli} u_l F \tag{45}$$

a pomocí (45) poslední integrál v (43) vyjádřit ve tvaru:

$$-\int_{S_P} \frac{1}{2} n_r \varepsilon_{prj} \varepsilon_{pli} (u_l P)_{,j} \delta u_i \mathrm{d}S_P + \int_{S_P} \frac{1}{2} n_r \varepsilon_{rjp} (\varepsilon_{pli} u_l P \delta u_i)_{,j} \mathrm{d}S_P.$$

Zde prvý integrál můžeme dále upravit podle vztahu $\varepsilon_{pli} \varepsilon_{prj} = \delta_{lr} \delta_{ij} - \delta_{lj} \delta_{ir}$ [16] a druhý integrál podle Stokesovy věty [16] převést na integrál po křivce L_P ohraničující část S_P povrchu zatíženou hydrostatickým tlakem P, tj.:

$$- \int_{S_P} \frac{1}{2} [n_l(u_l P)_{,i} - n_i(u_j P)_{,j}] \, \delta u_i \, \mathrm{d}S_P + \int_{L_P} \frac{1}{2} P \varepsilon_{ijk} \, u_i \, \delta u_j \, \nu_k \, \mathrm{d}L_P . \tag{46}$$

Zde ν_i značí jednotkový tečný vektor křivky L_P. Po dosazení (44) a (46) do (43) a zavedení variace (43) do (11) dostáváme místo (17) povrchovou podmínku pro povrch zatížený současně „mrtvým" zatížením P_i hydrostatickým tlakem P:

$$n_j \sigma_{ij} + (P_j + P_{nj}) u_{i,j} + \left\{ P n_i u_{j,j} - P n_j u_{j,i} + \frac{1}{2} n_i u_j P_{,j} - \frac{1}{2} n_j u_j P_{,i} \right\} = 0, \tag{47}$$

kde $\{\ldots\}$ představuje vůči (17) přídavný člen, jejž lze jinak zapsat též ve tvaru: $n_r \varepsilon_{pil} \varepsilon_{prj} \left(u_{l,j} P + \frac{1}{2} u_l P_{,j} \right)$. Navíc zde však dostáváme i podmínku na hraniční křivce L_P: $P \varepsilon_{jki} \nu_k u_i = 0$. Vyžaduje to buď, aby posunutí u_i se dělo ve směru ν_k, t. j. v tečně hraniční křivky, nebo aby posunutí u_i na ní bylo nulové (vetknutí) nebo, aby na ní bylo $P = 0$ (hladina kapaliny). Je-li plocha S_P souvislá uzavřená (celé těleso ponořené v kapalině či plynu), poslední podmínka odpadá.

Dodatek II. Vztah k teorii konečných pružných deformací

Uvažujme nyní, že posunutí u_i a deformace vůči počátečnímu stavu jsou konečné. Změna potenciální energie vnitřních sil na jednotku objemu zvoleného počátečního deformovaného stavu namísto rov. (4) je

$$\Delta U = S_{ij} \varepsilon_{ij} + I_1(\varepsilon_{ij}), \tag{48}$$

přičemž změny napětí odpovídající ε_{ij} jsou

$$\sigma_{ij} = \partial I_1 / \partial \varepsilon_{ij}, \tag{49}$$

jak plyne z definice práce napětí σ_{ij} na deformaci $\delta \varepsilon_{ij}$, jež je $\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$. Z podmínky $\delta(\Delta U - \Delta W) = 0$, kde $\Delta U = \int_V \Delta U \mathrm{d}V$, plynou postupem podobným jako od (10) ku (12) — (13) opět rovnice (18a), v nichž

$$\Theta_{ij} = \partial(\Delta U) / \partial u_{i,j}. \tag{50}$$

Podle toho lze vypočíst

$$T_{ij} = S_{pq} \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial u_{i,j}} + \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{pq}} \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial u_{i,j}} = (S_{pq} + \sigma_{pq}) \frac{\partial \varepsilon_{pq}}{\partial u_{i,j}} = s_{ij} + s_{pq} \frac{\partial(\varepsilon_{pq} - e_{pq})}{\partial u_{i,j}} =$$

$$= s_{ij} + s_{pq} \frac{1}{2} \frac{\partial(u_{r,p} u_{r,q})}{\partial u_{i,j}} = s_{ij} + s_{jk} u_{i,k}, \tag{51}$$

kde jsme konečnou deformaci dosadili podle rov. (1) a označili

$$s_{ij} = S_{ij} + \sigma_{ij} = \partial(\Delta U) / \partial \varepsilon_{ij}. \tag{52}$$

Symetrický tenzor napětí s_{ij} definovaný vztahem (51) nebo (52) vzhledem k ne-

napjatému počátečnímu stavu I se nazývá napětím Kirchhoffa [16]. Dosazením vztahu (51) do (18a) dostáváme nelineární rovnice rovnováhy v napětích s_{ij} ($F_i + f_i = X_i$, $P_i + p_i = Q_i$):

$$(s_{ij} + s_{jk}\, u_{i,k})_{,j} + X_i = 0. \tag{53}$$

Důležité však je, že platí i vůči libovolně zvolenému počátečnímu napjatému stavu. To zjednodušuje problém nestability; dosazením rov. (52), $\sigma_{ij} \ll S_{ij}$, do (53) a zanedbáním členů vyššího řádu dostáváme rov. (16) — (17). Kdybychom však T_{ij}, s_{ij} a u_i vztahli k nenapjatému stavu I, museli bychom položit $u_i = U_i + v_i$, kde $v_i \ll U_i$, a dostali bychom rovnice značně složitější [5].

Z rovnic (53) lze snadno získat např. nelineárnící rovnici Kármána—Föppla pro pokritické průhyby tenkých stěn aj.

Pro konečné deformace je třeba ve variační podmínce (9) a v jejím odvození pouze zaměnit $\frac{1}{2} C_{ij}^{kl} e_{ij} e_{kl}$ obecným výrazem I_1 (ε_{ij}).

LITERATURA

1. Bažant Z. P., Nestabilita kontinua a pevnost v tlaku. Výzk. zpráva č. 67, Stavební ústav ČVUT, Praha 1967. — 1a. Bažant Z. P., L'instabilité d'un milieu continu et la résistance en compression. Bulletin RILEM, no. 35, 99—112, Paríž 1967. — 1b. Bažant Z. P., On matematical solution of the geological strata folding problems. 23. International Geological Congress, Section 13 (v recenzi), Praha 1968. — 1c. Bažant Z. P., Axial fracture under compression and instability of deformation. Int. Jour. Fracture Mechanics (v recenzi). — 2. Biezeno C. B., Hencky H., On a general theory of elastic stability. Proc. of the Royal Academy, Vol. 31, 569—592, Vol. 32, 444—456, Amsterdam 1928. — 3. Biot M. A., Non-linear theory of elasticity and the linear case for a body under initial stress. Philosophical Magazine, Sér. 7, Vol. 27, 468—469, 1939. — 4. Biot M. A., Mechanics of incremental deformations. John Wiley and Sons, New York 1965. — 5. Bolotin V. V., Voprosy obščej teorii uprugoj ustojčivosti. Prikladnaja Matematika i Mechanika A. N. SSSR, XX, 561—577, 1956. — 5a. Brdička M., Mechanika kontinua. NČSAV, Praha 1959. — 6. Bryan G. H., Camb. Phil. Soc. Proc., 6, 199, 287, 1889. — 7. Bufler H., Die Druckstabilität rechteckiger Ve. ..ndplatten. Ing. Archiv, Nr. 2, 109, 1965. — 8. Collatz L., Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akad. Ver. Geest & Portig, Leipzig 1963. — 9. Green A. E., Adkins J. E., Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics. Clarendon Press (Chp. IX), Oxford 1960. — 10. Hadamard J., Leçons sur la propagation des ondes. Hermann, (Chp. VI), Paríž 1903. — 11. Hill R., On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 229—241, 1957. — 12. Neuber H., Die Grundgleichungen der elastischen Stabilität in allgemeinen Koordinaten und ihre Integration. Zeitschrift der Angew. Math. u. Mechanik, Vol. 23, 321—330, 1943, viz též: Vol. 32, 325, 1952, Vol. 33, 10, 1953. — 13. Neuber H., Theorie der elastischen Stabilität bei nichtlinearer Vorverformung. Acta Mechanica, no. 3, 285, Wien, Springer 1965. — 14. Novožilov V. V., Osnovy nelinějnoj teorii uprugosti. Tech-teor-izdat (engl. transl.: Graylock Press, Rochester 1953), Moskva—Leningrad 1948. — 15. Pearson C. E., General theory of elastic stability. Quarterly of Applied Mathematics, XIV, 2, 133—144, 1956. — 16. Prager W., Einführung in die Kontinuumsmechanik. Birkhäuser (trad. Introduction to mechanics of continuous media, Ginn,
theory of elastic stability. Philosophical Transactions of the Royal Society, A, Vol. 213, 187—244, 1913. — 18. Timoshenko S. P., Gere J. M., Theory of elastic stability. 2nd ed., Mc Graw Hill, New York 1961. — 19. Trefftz E., Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichte. Zeitschrift der Angew. Math. u. Mech. 13, No. 2, 160—165, 1933. — 20. Truesdell C., The nonlinear field theories of mechanics. Handbuch der Physik, Band III/3, vydal S. Flügge, Springer (Chap. 68—70), Berlin 1965. — 21.

Ziegler H., On the concept of elastic stability. Advances in. Appl. Mechanics, Vol. 4, 351—403, Acad. Press 1956. — 22. Skupin L., Niektoré otázky navrhovania konštrukcií zo skelných laminátov. Sborník: Užití plastických hmot v strojárenstve, VTS, Martin 1965. — 23. Kabelka J., Příspěvek k měření meze pevnosti v tlaku polyesterového laminátu. Zpráva č. 2—206, Ústav thermomechaniky ČSAV, Praha 1965.

Adresa autora:
Ing. Zdeněk P. Bažant, CSc.
t. č. University of Toronto (Canada).

Odevzdáno 3. 6. 1966

Diskusní příspěvky k tomuto článku (v rozsahu nejvíce 2 stran) pošlete trojmo redakci časopisu do 30. 4. 1968, aby bylo možno je uveřejnit v říjnovém čísle 1968.

Зденек П. Бажант

УСЛОВИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМАЦИИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ТОЛСТЫХ ПЛИТ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В предлагаемой статье решена общая проблема неустойчивости деформаций упругих трехразмерных тел и их деформаций в состоянии начальных напряжений. Прежде всего сформулирован вариационный принцип (9) для малых деформаций анизотропных тел с начальными напряжениями. Вариационым методом выведены дифференциальные уравнения (16) и краевые условия (17) для постоянных нагрузок в координатах начального равновесного состояния (В приложении выведены тоже краевые условия для гидростатического давления). Была формулирована краевая задача или для нулевых нагрузок проблема собственных значений. Для периодической деформации в форме (23) проблема сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям (25) с краевыми условиями (26). Были получены основные формы решения. Более сложные случаи были решены вариационным методом Рица. Решение можно тоже обобщить для вязкоупругих материалов. Сделана тоже критика других теорий и их недостатков. Было получено, что для форм неустойчивости по рис. 1 критические напряжения зависят главным образом от модулей упругости в поперечном направлени G_{xz} и E_{zz}. Наконец показано значение для теории разрушения при сжатии с продольными трещинами (или расслоением) и объяснено увеличение сопротивления при сжатии стены из стеклопластика в зависимости от ее кривизны.

Замечания и отзывы к этой статье надо послать в трех копиях (не более 2 страниц) редакции журнала до 30. 4. 1968 г., чтобы можно было опубликовать их в октябрьском номере 1968 г.

Zdenek P. Bažant

CONDITIONS OF DEFORMATION INSTABILITY OF A CONTINUOUS MEDIUM AND THEIR APPLICATION TO THICK SLABS AND TO HALF-SPACE

In the present paper a general problem of instability of deformation of elastic three-dimensional bodies and their deformations in the presence of initial stress are solved. First of all, a variational principle (9) is formulated for small changes of deformation of an anisotropic body due to small perturbations (deadloads) of the initial equilibrium state. Its special case is the Pearson's stability criterion (15). There are variationally derived the differential equilibrium equations (16) with pertinent surface conditions (17) for deadloads in the coordinates of the initial equilibrium state. (In an appendix the surface conditions for hydrostatic pressure are also derived.) Then the boundary value problem

or the Eigenvalue problem for zero perturbations are formulated. For a periodical deformation in the form (23) the problem may be reduced to ordinary linear differential equations (25) with boundary conditions (26) and the basic forms of solution are given. More complex cases are solved directly by the variational Ritz method. The solution may also be generalized for a viscoelastic material. A critical review of the other existing theories and their defficiencies is also presented. It has been found that for instability forms in Fig. 1 the critical stress depend mainly on the transverse elastic modulus G_{xz} and eventually E_{zz}. The significance for the theory of axial fracture under compression (or delamination) is briefly discussed and the increase of compression strength of a wall of fibre glass plastics with its curvature is explained.

Discussion of this paper should be sent in triplicate (one copy not exceeding 2 pages) to the Editor by 30. 4. 1968, to be published in the October issue of this Journal.